УДК 517.927

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ КОЛЕБАТЕЛЬНЫХ ПРОЦЕССОВ ПОДДЕРЖИВАЮЩИХ РАСТЯЖЕК УПРУГОЙ МАЧТЫ

В. В. Провоторов

Воронежский государственный университет

В работе представлена и исследована математическая модель колебательных процессов системы поддерживающих упругих мачтовых растяжек. Основа модели – пространственный ориентированный граф-пучок с ребрами, которые интерпретируются континуумами совершающими колебательные движения. Мачту моделируют два ребра графа, систему растяжек — остальные ребра. Следует отметить также, что модель носит «симметричный» характер: континуумы физически идентичны и совершают колебания по одинаковым законам с одинаковыми параметрами.

Анализ процессов в сложных системах, допускающих представление в виде набора одномерных континуумов взаимодействующих только через концы, приводит к изучению задачи Штурма—Лиувилля на сети [1]. На каждом ребре такой сети имеют место классические уравнения описывающие процесс, а в узлах сети, где ребра смыкаются, решения смежных уравнений связаны условиями взаимодействия. Если процесс в сложной системе, являясь динамическим, описывается линейными уравнениями в частных производных, то естественным является вопрос применимости метода Фурье, приводящий к важной задаче: разложению заданной функции по собственным функциям соответствующей задачи Штурма—Лиувилля на сети. Таким образом, вопрос обоснования метода Фурье для дифференциальных уравнений в частных производных на сетях приводит к изучению вопроса полноты системы собственных функций в пространстве функций с суммируемым квадратом.

В настоящей работе представлена и исследована математическая модель колебательных процессов системы поддерживающих упругих мачтовых растяжек. Основа модели — пространственный ориентированный граф-пучок с ребрами, которые интерпретируются континуумами совершающими колебательные движения. Следует отметить некоторую условность модели — отсутствует составляющая, описывающая поперечные колебания самой мачты, учитываются только продольные колебания. Мачту моделируют два ребра графа, систему растяжек — остальные ребра, что конечно упрощает исследования, но не лишает природных особенностей исследуемого процесса. Следует отметить также, что модель носит «симметричный» характер: континуумы физически идентичны и совершают колебания по одинаковым законам с одинаковыми параметрами. Целью работы является обоснование метода Фурье при исследовании соответствующей граничной задачи.

Постановка задачи. В основе задачи описания продольных колебаний стержня лежит следующая задача: найти функцию $Q(\xi,t)$, $\xi \in [0,\ell]\times[0,T]$, удовлетворяющую уравнению

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} Q(\xi,t) = \frac{\partial}{\partial \xi}\left(a(\xi)\frac{\partial}{\partial \xi} Q(\xi,t)\right), \qquad (1)$$

начальным условиям в момент времени $t = 0$ и граничным условиям при $\xi = 0$, $\xi = \ell$; классическое решение $Q(\xi,t)$ ищется в полосе $\{0 \le \xi \le \ell, 0 \le t < \infty\}$.

Ниже мы рассмотрим ситуацию, когда уравнение (1) задается на графе-пучке Γ_ℓ с узлом в точке $\ell/2$ и вершинами в точках 0 и ℓ, принадлежащими соответствующим ребрам: пусть $\gamma_k = \left(0,\frac{\ell}{2}\right)(k=\overline{1,m-1})$, $\gamma_m = \left(\frac{\ell}{2},\ell\right)$ — ребра графа и пусть $\Gamma = \bigcup_{k=1}^{m}\gamma_k$ (очевидно $\overline{\Gamma} = \bigcup_{k=1}^{m}\overline{\gamma}_k, \overline{\gamma}_k$ — замыкание γ_k). На множестве $\overline{\Gamma}\times[0,\infty)$ рассмотрим множество $\mathfrak{R}$ функций $Q(\xi,t)$, непрерывных по совокупности переменных на $\overline{\Gamma}\times[0,\infty)$ (непрерывность в узле $\ell/2$ означает выполнение соотношений $Q(\xi,t)_{\xi=\frac{\ell}{2}\in\overline{\gamma}_1} = Q(\xi,t)_{\xi=\frac{\ell}{2}\in\overline{\gamma}_2} = \ldots = Q(\xi,t)_{\xi=\frac{\ell}{2}\in\overline{\gamma}_m}, t\in[0,\infty)$) и имеющих непрерывные вторые производные по ξ и t на $\Gamma\times(0,\infty)$, причем в узле $\ell/2$ имеет место условие

$$\sum_{k=1}^{m-1} a(\xi)\frac{\partial Q}{\partial \xi}(\xi,t)_{\xi=\frac{\ell}{2}\in\overline{\gamma}_k} = a(\xi)\frac{\partial Q}{\partial \xi}(\xi,t)_{\xi=\frac{\ell}{2}\in\overline{\gamma}_m}, \quad (2)$$

называемому в литературе условием взаимодействия (трансмиссии) [1]. Соотношение (2) совместно с условием непрерывности в узле $\ell/2$ моделируют закрепление мачтовых растяжек к мачте, соответствующая граничная задача для $Q(\xi,t)\in\Re$ имеет вид:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}Q(\xi,t) = \frac{\partial}{\partial \xi}\left(a(\xi)\frac{\partial}{\partial \xi}Q(\xi,t)\right), \quad \xi,t\in\Gamma\times(0,\infty), \quad (3)$$

начальные условия определяются функциями $Q_0(\xi)$, $Q_1(\xi)$:

$$Q(\xi,0) = Q_0(\xi),\ \ \frac{\partial Q}{\partial t}(\xi,0) = Q_0(\xi), \quad (4)$$

граничные условия имеют вид:

$$\left(a(\xi)\frac{\partial Q}{\partial \xi}(\xi,t) - \alpha Q(\xi,t)\right)_{\xi=0\in\overline{\gamma}_k} = 0, \quad k=\overline{1,m-1}, \quad (5)$$

$$\left(a(\xi)\frac{\partial Q}{\partial \xi}(\xi,t) + \alpha Q(\xi,t)\right)_{\xi=\ell} = 0; \quad (6)$$

Здесь функции $a(\xi), Q_0(\xi), Q_1(\xi), \xi\in\overline{\Gamma}$ — вещественные и непрерывные; $a(\xi)>0, \xi\in\overline{\Gamma}$.

Формальное применение к задаче (3)—(6) метода Фурье приводит к необходимости изучения соответствующей задачи Штурма—Лиувилля. Функцию $Q(\xi,t)$ представим в виде $X(\xi)U(t)$, подставляя в уравнение (3) и разделяя переменные, имеем

$$\frac{U''(t)}{U(t)} = \frac{\left(a(\xi)X'\right)'}{X(\xi)} = -\lambda$$

или $\left(a(\xi)X'\right)' + \lambda X(\xi) = 0$, $U''(t) + \lambda U(t) = 0.$

Из граничных условий (5), (6) получаем краевые условия на функцию $X(\xi)$: $\left(a(\xi)X'(\xi) - \alpha X(\xi)\right)_{\xi=0\in\overline{\gamma}_k} = 0 \quad \left(k=\overline{1,m-1}\right)$, $\left(a(\xi)X'(\xi) + \alpha X(\xi)\right)_{\xi=\ell} = 0.$ Таким образом, в связи с нахождением функции $X(\xi)$ приходим к задаче о собственных значениях (задаче Штурма—Лиувилля на графе Γ_ℓ): найти те значения параметра λ , при которых существуют нетривиальные решения на многообразии $\left\{X(\xi)\in C(\overline{\Gamma})\cap C^2(\Gamma) : \sum_{k=1}^{m-1} a(\xi)X'(\xi)_{\xi=\frac{\ell}{2}\in\overline{\gamma}_k} = a(\xi)X'(\xi)_{\xi=\frac{\ell}{2}\in\overline{\gamma}_m}\right\}$, а также найти эти решения.

Значение параметра λ называется собственным значением, а нетривиальное решение $X(\xi)\equiv X(\xi,\lambda), \xi\in\overline{\Gamma}$ — собственной функцией соответствующей собственному значению λ .

Задача Штурма—Лиувилля. Вопросы обоснования метода Фурье непосредственно приводят к следующей проблеме: разложение заданной функции с носителем $\overline{\Gamma}$ в ряд по собственным функциям задачи Штурма—Лиувилля на графе Γ_π (мы сохраняем использованные выше обозначения $\Gamma, \overline{\Gamma}, \Gamma_\pi$, заменяя ℓ на π).

Пусть $\Im = \left\{y(x)\in C(\overline{\Gamma})\cap C^2(\Gamma) : \sum_{k=1}^{m-1} y'(x)_{x=\frac{\pi}{2}\in\overline{\gamma}_k} = y'(x)_{x=\frac{\ell}{2}\in\overline{\gamma}_m}\right\}$. На множестве $\Im$ рассмотрим краевую задачу

$$-y'' + q(x)y = \lambda y,\ \ x\in\Gamma, \quad (7)$$

$$U_k(y) \equiv \left(y'(x) - hy(x)\right)_{x=0\in\overline{\gamma}_k} = 0,\ \ k=\overline{1,m-1}, \quad (8)$$

$$V(y) \equiv \left(y'(x) + hy(x)\right)_{x=\pi} = 0. \quad (9)$$

(λ — спектральный параметр; $q(x)$, h — вещественные; $q(x)\in C(\overline{\Gamma})$ $(k=\overline{1,m})$). Заметим, что краевая задача для функции $X(\xi)$ приводится к задаче (7)—(9) известной подстановкой Лопиталя [2]:

$$\left(c = \frac{1}{\pi}\int_0^\ell \frac{1}{\sqrt{a(\tau)}}d\tau\right),\ \ x = \frac{1}{c}\int_0^\xi \frac{1}{\sqrt{a(\tau)}}d\tau,$$

$$y(x) = \sqrt[4]{a(x)}X(\xi),$$

при этом $x\in[0,\pi]$, спектральный параметр λ заменяется на $c\lambda$, $h=\alpha/a(0)$.

Наряду с краевой задачей (7)—(9) рассмотрим классическую краевую задачу Штурма—Лиувилля на отрезке $[0,\pi]$ для функций $y(x)\in C[0,\pi]\cap C^2(0,\pi)$:

$$-y'' + q(x)y = \lambda y,\ \ x\in(0,\pi), \quad (10)$$

$$U(y) \equiv y(0) - hy(0) = 0, \quad V(y) \equiv y'(\pi) + hy(\pi) = 0. \quad (11)$$

Здесь, как и в задаче (7)—(9), $q(x), h>0$– вещественные; $q(x)\in C[0,\pi]$. Симметричность задачи (7)—(9) ((10), (11)) понимается в виде наличия соотношений $q(x)_{\overline{\gamma}_1} = q(x)_{\overline{\gamma}_2} = \ldots = q(x)_{\overline{\gamma}_{m-1}} = q(\pi-x)_{\overline{\gamma}_m}$ $\left(q(x) = q(\pi-x), x\in[0,\pi]\right)$.

В этом разделе получим простейшие свойства спектра краевой задачи (7)—(9) и изучим асимптотическое поведение собственных значений и собственных функций, при этом краевая задача (10), (11) носит вспомогательный характер.

В дальнейшем нам потребуется следующая известная теорема, доказательство которой можно найти, например, в монографиях [2, 3].

Теорема 1. *Для любого* α *существует единственное решение* $y(x,\lambda) \in C[0,\pi] \cap C^2(0,\pi)$ *уравнения* (10) *такое, что* $y(0,\lambda) = \sin\alpha$, $y'(0,\lambda) = -\cos\alpha$. *Для каждого фиксированного* $x \in [0,\pi]$ *функция* $y(x,\lambda)$ *является целой аналитической функцией от* λ.

Пусть функции $\mu(x,\lambda)$, $\eta(x,\lambda) \in C[0,\pi] \cap C^2(0,\pi)$ — решения уравнения (10), удовлетворяющие начальным условиям $\mu\left(\frac{\pi}{2},\lambda\right) = 1$, $\mu'\left(\frac{\pi}{2},\lambda\right) = 0$ и $\eta\left(\frac{\pi}{2},\lambda\right) = 0$, $\eta'\left(\frac{\pi}{2},\lambda\right) = 1$ соответственно (линейная независимость функций $\mu(x,\lambda), \eta(x,\lambda)$ очевидна). Тогда функции

$$\omega_k(x,\lambda) = \begin{cases} \delta_{ik}\eta(x,\lambda), \ x \in \bar{\gamma}_i \ \ (i = \overline{1,m-1}); \\ \eta(x,\lambda), \ x \in \bar{\gamma}_m, \end{cases} \qquad (12)$$

$$k = \overrightarrow{1,m-1},$$

$$\omega_m(x,\lambda) \equiv \mu(x,\lambda), \ x \in \bar{\Gamma}$$

(здесь δ_{ik} — символ Кронекера) очевидно являются линейно независимыми решениями уравнения (7) на графе $\bar{\Gamma}$.

Лемма 1. Функции $\omega_k(x,\lambda)$, $k = \overline{1,m}$ *образуют фундаментальную систему решений уравнения* (7).

Доказательство. Пусть $y(x,\lambda)$ — произвольное решение уравнения (7), тогда

$$y(x,\lambda)_{\bar{\gamma}_k} = c_{1k}\mu(x,\lambda) + c_{2k}\eta(x,\lambda), \ k = \overline{1,m}. \ (13)$$

Включение $y(x,\lambda) \in \Im$ связывает постоянные c_{1k}, c_{2k} соотношениями

$$c_{11} = c_{12} = \ldots = c_{1m}, \ \sum_{k=1}^{m-1} c_{2k} = c_{2m}.$$

Пусть $c_{2k} = c_k \left(k = \overline{1,m-1}\right)$, $c_{1k} = c_k \left(k = \overline{1,m}\right)$, тогда $c_{2m} = \sum_{k=1}^{m-1} c_k$ и функция $y(x,\lambda)$ в представлении (13) принимает вид

$$y(x,\lambda) = \sum_{k=1}^{m} c_k\omega_k(x,\lambda), \ x \in \bar{\Gamma},$$

т.е. произвольное решение уравнения (7) является некоторой линейной комбинацией функций $\omega_k(x,\lambda)$, $(k = \overline{1,m})$. Лемма доказана.

Фундаментальную систему решений $\{\omega_k(x,\lambda)\}_{k=1}^m$ уравнения (7) назовем базовой фундаментальной системой решений уравнения (7).

Пусть теперь функции $u(x,\lambda), v(x,\lambda) \in C[0,\pi] \cap C^2(0,\pi)$ являются решениями уравнения (10) при начальных условиях $u(0,\lambda) = 1, u'(0,\lambda) = hv(\pi,\lambda) = 1, \ v'(\pi,\lambda) = -h$ ($v(x,\lambda) = u(\pi - x,\lambda), x \in [0,\pi]$). В силу теоремы 1 при каждом фиксированном λ функции $u(x,\lambda), v(x,\lambda)$ являются целыми аналитическими по λ. Ясно, что $U(u) = 0, V(v) = 0$. Рассмотрим функции

$$\varphi_k(x,\lambda) = \begin{cases} u\left(\frac{\pi}{2},\lambda\right)\mu(x,\lambda), x \in \bar{\gamma}_i \\ \quad (i = \overline{1,m-1}); i \neq k; \\ u(x,\lambda), \ x \in \bar{\gamma}_k \cup \gamma_m, \end{cases}$$

$$(k = \overline{1,m-1}), \qquad (14)$$

$$\varphi_m(x,\lambda) = \begin{cases} v\left(\frac{\pi}{2},\lambda\right)\mu(x,\lambda), \ x \in \bar{\gamma}_i (i = \overline{2,m-1}); \\ v(x,\lambda), \ x \in \bar{\gamma}_1 \cup \gamma_m. \end{cases}$$

Очевидно функции $\varphi_k(x,\lambda)\left(k = \overline{1,m}\right)$ принадлежат множеству $\Im$, являются решениями уравнения (7) и удовлетворяют краевым условиям:. $U_k(\varphi_k) = 0\left(k = \overline{1,m-1}\right), V(\varphi_m) = 0$. Покажем их линейную независимость. В соответствии с леммой 1 функции $\varphi_k(x,\lambda)\left(k = \overline{1,m}\right)$ представимы в виде линейных комбинаций функций $\omega_k(x,\lambda)\left(k = \overline{1,m}\right)$:

$$\varphi_k(x,\lambda) = \sum_{i=1}^{m} a_{ki}\omega_i(x,\lambda), \ k = \overline{1,m}, \qquad (15)$$

где a_{ki} — надлежащим образом подобранные константы.

Лемма 2. Решения $\varphi_k(x,\lambda)\left(k = \overline{1,m}\right)$ *уравнения* (7) *линейно независимы на графе* $\bar{\Gamma}$ *тогда и только тогда, когда матрица* $\mathrm{A} = \|a_{ki}\|$, $k, i = \overline{1,m}$, *составленная из коэффициентов* a_{ki} *представлений* (15), *является невырожденной.*

Доказательство. Функции $\varphi_k(x,\lambda)(k = \overline{1,m})$ линейно независимы на $\bar{\Gamma}$, если соотношение

$$\sum_{k=1}^{m} \alpha_k\varphi_k(x,\lambda) = 0, \ x \in \bar{\Gamma},$$

имеет место только при $\alpha_k = 0\left(k = \overline{1,m}\right)$. Учитывая (15), получаем

$$\sum_{k=1}^{m} \alpha_k \sum_{i=1}^{m} a_{ki}\omega_i(x,\lambda) = 0, \ x \in \bar{\Gamma}.$$

Т. к. функции $\omega_k(x,\lambda)\left(k = \overline{1,m}\right)$ являются линейно независимыми на $\bar{\Gamma}$, то

$$\sum_{k=1}^{m} \alpha_k a_{ki} = 0, \ i = \overline{1,m}. \qquad (16)$$

Таким образом, получаем систему линейных однородных уравнений (16) относительно α_k

с определителем отличным от 0, значит, $\alpha_k = 0\left(k = \overline{1,m}\right)$. Лемма доказана.

Получим разложение функций $\varphi_k(x,\lambda)$ $\left(k = \overline{1,m}\right)$ по базовой фундаментальной системе (12)

$$\varphi_k(x,\lambda) = \sum_{i=1}^{m} a_{ki}\omega_i(x,\lambda),\ k = \overline{1,m}. \qquad (17)$$

Для каждого фиксированного $k = \overline{1,m}$, в соответствии с (16), получаем m систем линейных алгебраических уравнений относительно постоянных $a_{ki}(k,i = \overline{1,m})$, которые и определяют эти постоянные: $a_{ki} = \delta_{ki}u'(\frac{\pi}{2},\lambda)(k,i = \overline{1,m-1})$; $a_{km} = u\left(\frac{\pi}{2},\lambda\right)(k = \overline{1,m-1})$; $a_{m1} = v'\left(\frac{\pi}{2},\lambda\right)$; $a_{mi} = 0\ (k = \overline{2,m-1})$; $a_{mm} = v\left(\frac{\pi}{2},\lambda\right)$. Значит, матрица A коэффициентов разложения функций $\varphi_k(x,\lambda)\left(k = \overline{1,m}\right)$ по базовой фундаментальной системе решений (12) имеет вид

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} u'\left(\frac{\pi}{2},\lambda\right) & 0 & 0 & \dots & 0 & u\left(\frac{\pi}{2},\lambda\right) \\ 0 & v'\left(\frac{\pi}{2},\lambda\right) & 0 & \dots & 0 & u\left(\frac{\pi}{2},\lambda\right) \\ 0 & 0 & u'\left(\frac{\pi}{2},\lambda\right) & \dots & 0 & u\left(\frac{\pi}{2},\lambda\right) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & u'\left(\frac{\pi}{2},\lambda\right) & u\left(\frac{\pi}{2},\lambda\right) \\ v'\left(\frac{\pi}{2},\lambda\right) & 0 & 0 & \dots & 0 & v\left(\frac{\pi}{2},\lambda\right) \end{pmatrix},$$

определитель ее равен $-\left(u'\left(\frac{\pi}{2},\lambda\right)\right)^{m-2}\delta(\lambda)$, где $\delta(\lambda) = u(x,\lambda)v'(x,\lambda) - u'(x,\lambda)v(x,\lambda), \quad x \in [0,\pi]$. Таким образом получена

Теорема 2. Если λ *не является нулем* $u'\left(\frac{\pi}{2},\lambda\right)^{m-2}\delta(\lambda)$, *то функции* $\varphi_k(x,\lambda)\left(k = \overline{1,m}\right)$ *образуют фундаментальную систему решений уравнения* (7), *причем* $U_k(\varphi_k) = 0\left(k = \overline{1,m-1}\right)$, $V(\varphi_m) = 0$.

Пусть $(Ly)(x) \equiv -y'' + q(x)y$ — дифференциальное выражение, заданное на функциях $y(x) \in \Im\left(x \in \overline{\Gamma}\right)$ и пусть D — совокупность функций $y(x)$, удовлетворяющих краевым условиям (8), (9). Оператором Штурма—Лиувилля L на графе $\overline{\Gamma}$ назовем оператор, порожденный дифференциальным выражением $(Ly)(x)$ и многообразием D. Обозначим $\left\langle g_1(x), g_2(x)\right\rangle = g_1(x)g'_2(x) - g'_1(x)g_2(x)$, $x \in \overline{\Gamma}$ (в вершинах и узле графа производные понимаются односторонними)

Лемма 3. *Для любых функций* $h_1(x), h_2(x) \in \Im$ *имеет место*

$$\int_\Gamma (Lh_1)(x)h_2(x)\,dx = \left\langle h_1(x), h_2(x)\right\rangle_{x=\pi} - \\ -\sum_{k=1}^{m-1}\left\langle h_1(x), h_2(x)\right\rangle_{x=0\in\overline{\gamma}_k} + \int_\Gamma h_1(x)(Lh_2)(x)\,dx, \qquad (18)$$

здесь интеграл на $\overline{\Gamma}$ *определяется как сумма интегралов по* $\gamma_k(k = \overline{1,m})$.

Доказательство. Рассмотрим интеграл $\int_\Gamma (Lh_1)(x)h_2(x)\,dx = \sum_{k=1}^{m}\int_{\gamma_k}(Lh_1)(x)h_2(x)\,dx$. Вычислим каждый интеграл по $\overline{\gamma}_k\left(k = \overline{1,m}\right)$ два раза по частям, получим

$$\sum_{k=1}^{m}\int_{\gamma_k}(Lh_1)(x)h_2(x)\,dx =$$
$$= \sum_{k=1}^{m}\int_{\gamma_k}\left(-h_1''(x) + q(x)h_1(x)\right)h_2(x)\,dx =$$
$$= \left[h_1(x)h_2'(x) - h_1'(x)h_2(x)\right]_{x=\pi} -$$
$$-\sum_{k=1}^{m-1}\left[h_1(x)h_2'(x) - h_1'(x)h_2(x)\right]_{x=0\in\overline{\gamma}_k} +$$
$$+\sum_{k=1}^{m-1}\left[h_1(x)h_2'(x) - h_1'(x)h_2(x)\right]_{x=\frac{\pi}{2}\in\overline{\gamma}_k} -$$
$$-\left[h_1(x)h_2'(x) - h_1'(x)h_2(x)\right]_{x=\frac{\pi}{2}\in\overline{\gamma}_m} +$$
$$+\sum_{k=1}^{m}\int_{\gamma_k}h_1(x)\left(-h_2''(x) + q(x)h_2(x)\right)dx =$$
$$= \left\langle h_1(x), h_2(x)\right\rangle_{x=\pi} - \sum_{k=1}^{m-1}\left\langle h_1(x), h_2(x)\right\rangle_{x=0\in\overline{\gamma}_k} +$$
$$+\int_\Gamma h_1(x)(Lh_2)(x)\,dx,$$

здесь использованы краевые условия (8), (9) и структура многообразия $\Im$. Лемма доказана.

Следствие. Если $h_1(x), h_2(x) \in D$, то

$$\int_\Gamma (Lh_1)(x)h_2(x)\,dx = \int_\Gamma h_1(x)(Lh_2)(x)\,dx.$$

Теорема 3. *Собственные значения и собственные функции краевой задачи* (7)—(9) *вещественны. Собственные функции, соответствующие различным собственным значениям, ортогональны в* $L^2(\Gamma)$.

Доказательство. Пусть $\lambda_0 = u + iv$ — невещественное собственное значение и $y_0(x)$ — ему соответствующая собственная функция. Из-за вещественности $q(x), h, H$ число $\overline{\lambda}_0 = u - iv$ также является собственным значением с собственной функцией $\overline{y}_0(x)$. Тогда из леммы 3 $\left(\lambda_0 \neq \overline{\lambda}_0\right)$

вытекает $\|y_0(x)\|^2_{L^2(\Gamma)} = \int_\Gamma y_0(x)\bar{y}_0(x)\,dx = 0,$ что невозможно. Таким образом, все собственные значения краевой задачи (2)—(4) вещественные, и следовательно, собственные функции вещественные. Пусть далее $\lambda_n \neq \lambda_k$ — собственные значения краевой задачи (7)—(9), $y_n(x), y_k(x)$ — соответствующие собственные функции. Тогда, как следует из леммы 3,

$$\int_\Gamma (Ly_n)(x)\,y_k(x)\,dx = \int_\Gamma y_n(x)(Ly_k)(x)\,dx,$$

т.е.

$$\lambda_n \int_\Gamma y_n(x)\,y_k(x)\,dx = \lambda_k \int_\Gamma y_n(x)\,y_k(x)\,dx \ \ (n \neq k).$$

Отсюда вытекает ортогональность функций $y_n(x), y_k(x)$ в $L^2(\Gamma)$:

$$\int_\Gamma y_n(x)\,y_k(x)\,dx = 0 \ \ (n \neq k).$$

Обозначим

$$\Delta(\lambda)_{x=\bar\gamma_k} = \begin{cases} \langle \varphi_k(x,\lambda),\ \varphi_m(x,\lambda)\rangle, k=\overline{1,m-1}, \\ \langle \varphi_1(x,\lambda),\ \varphi_m(x,\lambda)\rangle, k=m. \end{cases} \qquad (19)$$

Согласно формуле Остроградского—Лиувилля выражения $\langle \varphi_k(x,\lambda), \varphi_m(x,\lambda)\rangle$, $k=\overline{1,m-1}$ не зависят от x на каждом ребре $\bar\gamma_i\ (i=\overline{1,m})$, а значит, $\Delta(\lambda)$ является кусочно-постоянной функцией по $x\in\bar\Gamma$. Очевидны простейшие свойства функции $\Delta(\lambda)$:

$$\Delta(\lambda)_{\substack{x=0\in\bar\gamma_k \\ (k=\overline{1,m-1})}} = \langle \varphi_k(x,\lambda), \varphi_m(x,\lambda)\rangle_{x=0\in\bar\gamma_k} =$$
$$= \left[\varphi_m'(x,\lambda) - h\varphi_m(x,\lambda)\right]_{x=0\in\bar\gamma_k} = U_k(\varphi_m),$$
$$\Delta(\lambda)_{x=\pi} = \langle \varphi_1(x,\lambda), \varphi_m(x,\lambda)\rangle_{x=\pi} =$$
$$= -\left[\varphi'_1(x,\lambda) + h\varphi_1(x,\lambda)\right]_{x=\pi} = -V(\varphi_1);$$

кроме того, учитывая представления (14) и (19), а также симметричность задачи (10), (11) $(v(x,\lambda) = u(\pi - x,\lambda), x\in[0,\pi])$, получаем

$$\Delta(\lambda)_{x\in\bar\gamma_1\cup\bar\gamma_m} = -2u\left(\frac{\pi}{2},\lambda\right)u'\left(\frac{\pi}{2},\lambda\right),$$
$$\Delta(\lambda)_{x\in\bar\gamma_2} = \Delta(\lambda)_{x\in\bar\gamma_3} = \ldots = \Delta(\lambda)_{x\in\bar\gamma_{m-1}} =$$
$$= -u\left(\frac{\pi}{2},\lambda\right)u'\left(\frac{\pi}{2},\lambda\right),$$

откуда вытекает: равенство нулю функции $\Delta(\lambda)$ хотя бы на одном из ребер влечет равенство нулю ее на графе $\bar\Gamma$. Обозначим $\hat\Delta(\lambda) = \Delta(\lambda)_{x\in\bar\gamma_1\cup\bar\gamma_m}$, очевидно $\hat\Delta(\lambda) = 2\Delta(\lambda)_{x\in\bar\gamma_k}(k=\overline{2,m-1})$.

Установим основные свойства функций $\Delta(\lambda)$, $\hat\Delta(\lambda)$.

Теорема 4. *1) Функция $\Delta(\lambda)$ является целой по λ и имеет не более счетного числа нулей $\{\lambda_n\}$. 2) Нули $\{\lambda_n\}$ совпадают с собственными значениями краевой задачи (7)—(9). 3) Функции $\varphi_k(x,\lambda_n)(k=\overline{1,m})$ являются собственными функциями и существует последовательность $\{\beta_n\}(\beta_n \neq 0)$ такая, что*

$$\varphi_m(x,\lambda_n) = \beta_n\varphi_1(x,\lambda_n). \qquad (20)$$

Доказательство. 1). Функции $\varphi_k(x,\lambda)$ $(k=\overline{1,m})$ являются целыми по λ (теорема 1), функции $\langle \varphi_k(x,\lambda), \varphi_m(x,\lambda)\rangle$ также являются целыми по λ, значит, и $\Delta(\lambda)$ — целая функция λ.

2). Пусть λ_0 — нуль $\Delta(\lambda)$. тогда $U_k(\varphi_m) = 0\,(k=\overline{1,m-1})$, $V(\varphi_1)=0$, кроме того $V(\varphi_m)=0$, $U_k(\varphi_1) = 0\ (k=\overline{1,m-1})$. Значит, λ_0 — собственное значение краевой задачи (7)—(9), а $\varphi_1(x,\lambda_0), \varphi_m(x,\lambda_0)$ — собственные функции. Из представлений (14) функций $\varphi_1(x,\lambda_0), \varphi_m(x,\lambda_0)$ вытекает, что для функций $u(x,\lambda), v(x,\lambda)$, $x\in[0,\pi]$ имеет место $U(u)=0, V(u)=0$ и $U(v)=0, V(v)=0$, т.е. λ_0 — собственное значение краевой задачи (10), (11) и $v(x,\lambda_0) = \beta_0 u(x,\lambda_0), x\in[0,\pi]\ (\beta_0\neq 0)$, значит, $\varphi_m(x,\lambda_0) = \beta_0\varphi_1(x,\lambda_0), x\in\bar\Gamma$. При этом:

если $u\left(\frac{\pi}{2},\lambda_0\right) = 0,$ а значит, $v\left(\frac{\pi}{2},\lambda_0\right)=0,$ $u'\left(\frac{\pi}{2},\lambda_0\right)\neq 0,$ $v'\left(\frac{\pi}{2},\lambda_0\right)\neq 0,$ то собственное значение λ_0 имеет $m-1$ линейно независимых на $\bar\Gamma$ собственных функций:

$$\varphi_k^0(x,\lambda_0) = \begin{cases} 0,\ x\in\bar\gamma_i\ (i=\overline{1,m-1};\ i\neq k); \\ u(x,\lambda_0),\ x\in\bar\gamma_k\cup\bar\gamma_m; \end{cases}$$
$$(k=\overline{1,m-1}),$$
$$(\varphi_m^0(x,\lambda_0) = \beta_0\varphi_1^0(x,\lambda_0));$$

если $u\left(\frac{\pi}{2},\lambda_0\right)\neq 0,$ а значит, $v\left(\frac{\pi}{2},\lambda_0\right)\neq 0,$ $u'\left(\frac{\pi}{2},\lambda_0\right)\neq 0,$ $v'\left(\frac{\pi}{2},\lambda_0\right)=0,$ то $u(x,\lambda_0)\equiv$ $\equiv u\left(\frac{\pi}{2},\lambda_0\right)\mu(x,\lambda_0),$ $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ и собственному значению λ_0 соответствует одна собственная функция $\varphi^0(x,\lambda_0)\equiv\varphi_k(x,\lambda_0)(k=\overline{1,m})$.

Обратно, пусть теперь λ_0 — собственное значение краевой задачи (7)—(9) и $y_0(x)$ — собственная функция. Тогда $U_k(y_0)=0$ $(k=\overline{1,m-1})$, $V(y_0)=0$. Отметим, что существует хотя бы одно ребро γ_{k_0} $(1\le k_0\le m-1)$, для которого значение $y_0(x)_{x=0\in\bar\gamma_{k_0}}\neq 0$. В противном случае при $y_0(x)_{x=0\in\bar\gamma_k} = 0\ (k=\overline{1,m-1})$ в соответствии с краевыми условиями (8) $y_0'(x)|_{x=0\in\bar\gamma_k} = 0$

$(k=\overline{1,m-1})$, откуда $y_0(x)\equiv 0, x\in\bar\gamma_k$ $(k=\overline{1,m-1})$, а значит, $y_0(x)\equiv 0, x\in\bar\Gamma$, что невозможно.

Пусть $y_0(x)_{x=0\in\bar\gamma_k}\neq 0$ $\left(k=\overline{1,k_0}, 1\le k_0<m-1\right)$, $y_0(x)_{x=0\in\bar\gamma_k}=0$ $(k=\overline{k_0+1,m-1})$. Тогда $y_0(x)\equiv 0$, $x\in\bar\gamma_k$ $(k=\overline{k_0+1,m-1})$, непрерывность в узле $\dfrac{\pi}{2}$ дает $y_0(x)_{x=\frac{\pi}{2}\in\bar\gamma_k}=0(k=\overline{1,m-1})$. Так как $y_0(x)=\alpha_k u(x,\lambda_0)$, $x\in\bar\gamma_k$ $\left(k=\overline{1,k_0}\right)$ (α_k — некоторые постоянные), значит, $u\left(\dfrac{\pi}{2},\lambda_0\right)=0$. Непрерывность функции $y_0(x)$ в узле $\dfrac{\pi}{2}$ и включение $y_0(x)\in\Im$ дают начальные условия для функции $y_0(x)$ на ребре γ_m: $y_0\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=0$, $y_0'\left(\dfrac{\pi}{2}\right)_{\bar\gamma_m}=\sum\limits_{k=1}^{k_0}\alpha_k u'\left(\dfrac{\pi}{2},\lambda_0\right)$. Отсюда $y_0(x)=$ $=\sum\limits_{k=1}^{k_0}\alpha_k\varphi_k^0(x,\lambda_0)$, $x\in\bar\Gamma$. Значит, $V(y_0)=V\left(\sum\limits_{k=1}^{k_0}\alpha_k\varphi_k^0\right)=$ $=\sum\limits_{k=1}^{k_0}\alpha_k V\left(\varphi_k^0\right)=-\hat\Delta\left(\lambda_0\right)\sum\limits_{k=1}^{k_0}\alpha_k(\varphi_1^0(x,\lambda_0)=\varphi_k^0(x,\lambda_0)=$ $=u(x,\lambda_0)$, $x\in\bar\gamma_m, k=\overline{1,k_0})$. Учитывая $V(y_0)=0$, получаем $\hat\Delta(\lambda_0)=0$, т.к. постоянные α_k всегда можно выбрать так, что $\sum\limits_{k=1}^{k_0}\alpha_k\neq 0$. Отсюда $\Delta(\lambda_0)=0$.

Пусть далее $y_0(x)_{x=0\in\bar\gamma_k}\neq 0$ $\left(k=\overline{1,m-1}\right)$. Тогда $y_0(x)=\alpha_k u(x,\lambda_0)$, $x\in\bar\gamma_k$ $\left(k=\overline{1,m-1}\right)$. Если $u\left(\dfrac{\pi}{2},\lambda_0\right)=0$, тогда аналогично предыдущему $y_0(x)=\sum\limits_{k=1}^{m-1}\alpha_k\varphi_k^0(x,\lambda_0)$, $x\in\bar\Gamma$ и λ_0 — нуль функции $\Delta(\lambda_0)$. Если же $u\left(\dfrac{\pi}{2},\lambda_0\right)\neq 0$, то из условия непрерывности в узле $\dfrac{\pi}{2}$ вытекает, что постоянные α_k равны между собой и можно считать их равными единице. Таким образом, получаем начальные условия для функции $y_0(x)$ на ребре $\bar\gamma_m$: $y_0(x)_{x=\frac{\pi}{2}\in\bar\gamma_m}=u\left(\dfrac{\pi}{2},\lambda_0\right)$, $y_0'(x)_{x=\frac{\pi}{2}\in\bar\gamma_m}=(m-1)u'\left(\dfrac{\pi}{2},\lambda_0\right)$. С другой стороны, исходя из условий $v(\pi,\lambda_0)=1, v'(\pi,\lambda_0)=-h$, получаем $y_0(x)_{x\in\bar\gamma_m}=\alpha v(x,\lambda_0)$ (α — некоторая постоянная). Учитывая симметричность краевой задачи (5), (6), имеем $y_0(x)_{x=\frac{\pi}{2}\in\bar\gamma_m}=\alpha v\left(\dfrac{\pi}{2},\lambda_0\right)=$ $=\alpha u\left(\dfrac{\pi}{2},\lambda_0\right)$ и $y_0'(x)_{x=\frac{\pi}{2}\in\bar\gamma_m}=\alpha v'\left(\dfrac{\pi}{2},\lambda_0\right)=$ $=-\alpha u'\left(\dfrac{\pi}{2},\lambda_0\right)$. Отсюда и из предыдущего получаем $\alpha=1, u'\left(\dfrac{\pi}{2},\lambda_0\right)=0$ (т.е. $v'\left(\dfrac{\pi}{2},\lambda_0\right)=0$). Значит, $y_0(x)=v(x,\lambda_0)$, $x\in\bar\gamma_m$. Учитывая $y'_0(x)_{x=\frac{\pi}{2}\in\bar\gamma_m}=0$ $(k=\overline{1,m})$, получаем $y_0(x)=$ $=\varphi_m(x,\lambda_0)$, $x\in\bar\Gamma$. Собственное значение λ_0 является нулем функции $\Delta(\lambda)$, т.к. $\Delta(\lambda)_{x=0\in\bar\gamma_k}=U_k(\varphi_m)=U_k(y_0)=0$ $(k=\overline{1,m-1})$. Теорема доказана.

Следствие. Пусть Ω — множество собственных значений λ_n краевой задачи (7)—(9), тогда $\Omega=\Omega'\cup\Omega''$, где Ω' — множество собственных значений λ_n' таких, что $u\left(\dfrac{\pi}{2},\lambda_n'\right)=0$, Ω'' — множество собственных значений λ_n'' для которых $u'\left(\dfrac{\pi}{2},\lambda_n''\right)=0$. При этом, если собственное значение $\lambda_n=\lambda_n'$, то оно имеет $m-1$ собственных функций

$$\varphi_k(x,\lambda_n')=\begin{cases}0,\ x\in\bar\gamma_i,\ (i=\overline{1,m-1},\ i\neq k);\\ u(x,\lambda_n'),\ x\in\bar\gamma_i\cup\bar\gamma_m;\end{cases}$$
$$k=\overline{1,m-1},$$

при этом $\beta_n=-1$; если собственное значение $\lambda_n=\lambda_n''$, то оно простое: $\varphi(x,\lambda_n'')=\varphi_1(x,\lambda_n'')$ $(=\varphi_k(x,\lambda_n''), k=\overline{2,m}), x\in\bar\Gamma$ — соответствующая собственная функция $(\beta_n=1)$.

Обозначим $\omega_n=\int\limits_\Gamma\varphi_1^2(x,\lambda_n)dx$.

Теорема 5. Пусть λ_n — *собственное значение краевой задачи* (7)—(9), *тогда*

$$\hat\Delta'(\lambda_n)=\beta_n\omega_n, \qquad (21)$$

где число β_n *определяется в соответствии со следствием из теоремы 4.*

Доказательство. Пусть λ_n — собственное значение краевой задачи (7)—(9). Возьмем произвольное λ из окрестности λ_n. Для функций $\varphi_1(x,\lambda)$, $\varphi_m(x,\lambda_n)$ формула (18) принимает вид

$$\int\limits_\Gamma(L\varphi_1)(x,\lambda)\varphi_m(x,\lambda_n)dx=$$
$$=\left\langle\varphi_1(x,\lambda),\varphi_m(x,\lambda_n)\right\rangle_{x=\pi}-$$
$$-\sum_{k=1}^{m-1}\left\langle\varphi_1(x,\lambda),\varphi_m(x,\lambda_n)\right\rangle_{x=0\in\bar\gamma_k}+$$
$$+\int\limits_\Gamma\varphi_1(x,\lambda)(L\varphi_m)(x,\lambda_n)dx.$$

Учитывая краевые условия (3),(4), получаем

$$\left\langle\varphi_1(x,\lambda),\varphi_m(x,\lambda_n)\right\rangle_{x=\pi}-\sum_{k=1}^{m-1}\left\langle\varphi_1(x,\lambda),\varphi_m(x,\lambda_n)\right\rangle_{x=0\in\bar\gamma_k}=$$
$$=\left[\varphi_1(x,\lambda)\varphi_m'(x,\lambda_n)-\varphi_1'(x,\lambda)\varphi_m(x,\lambda_n)\right]_{x=\pi}-$$
$$-\sum_{k=1}^{m-1}\left[\varphi_1(x,\lambda)\varphi_m'(x,\lambda_n)-\varphi_1'(x,\lambda)\varphi_m(x,\lambda_n)\right]_{x=0\in\bar\gamma_k}=$$

$$= -[\varphi_1'(x,\lambda) + h\varphi_1(x,\lambda_n)]_{x=\pi} - \sum_{k=1}^{m-1}[\varphi_m(x,\lambda_n) -$$

$$-h\varphi_m(x,\lambda_n)]_{x=0\in\bar{\gamma}_k} = -V(\varphi_1) = \hat{\Delta}(\lambda),$$

значит, предыдущее соотношение дает $(\lambda - \lambda_n)\int\limits_\Gamma \varphi_1(x,\lambda)\varphi_m(x,\lambda_n)dx = \hat{\Delta}(\lambda_n)$.

При $\lambda \to \lambda_n$, используя (20), приходим к формуле (21).

Замечание. Из $\beta_n \neq 0, \omega_n \neq 0$ в силу соотношения (21) и представления (19) вытекает простота нулей функции $\hat{\Delta}(\lambda)$, а значит, и функции $\Delta(\lambda)$.

Изучим асимптотическое поведение собственных значений и собственных функций задачи (7)—(9) в комплексной λ — плоскости спектрального параметра . Пусть $\lambda = \rho^2$, $\tau = \operatorname{Im}\rho$; обозначим $G_\delta = \{\rho : |\rho - k| \geq \delta > 0,$ $k = 0,1,2,...\}$.

Теорема 6. При $|\rho| \to +\infty$ *верны следующие асимптотические формулы:*

$$\varphi_{\substack{k\\(k=\overline{1,m-1})}}(x,\lambda) = \begin{cases} \cos\rho\dfrac{\pi}{2}\cos\rho\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right),\ x \in \bar{\gamma}_i \\ (i = \overline{1,m-1},\ i \neq k) \\ \cos\rho x,\ x \in \bar{\gamma}_k \cup \bar{\gamma}_m \end{cases} +$$

$$+O\left(\frac{1}{|\rho|}\exp(|\tau|x)\right),$$

$$\varphi_m(x,\lambda) = \begin{cases} \cos\rho\dfrac{\pi}{2}\cos\rho\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right),\ x \in \bar{\gamma}_i \\ (i = \overline{2,m-1}) \\ \cos\rho x,\ x \in \bar{\gamma}_1 \cup \bar{\gamma}_m \end{cases} +$$

$$+O\left(\frac{1}{|\rho|}\exp(|\tau|x)\right),$$

$$\varphi'_{\substack{k\\(k=\overline{1,m-1})}}(x,\lambda) = \rho\begin{cases} \cos\rho\dfrac{\pi}{2}\sin\rho\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right),\ x \in \bar{\gamma}_i \\ (i = \overline{2,m-1},\ i \neq k) \\ -\sin\rho x,\ x \in \bar{\gamma}_k \cup \bar{\gamma}_m \end{cases} + \qquad (22)$$

$$+O(\exp(|\tau|x)),$$

$$\varphi'_m(x,\lambda) = \begin{cases} \cos\rho\dfrac{\pi}{2}\sin\rho\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right);\ x \in \bar{\gamma}_i \\ (i = \overline{2,m-1}) \\ -\sin\rho(\pi - x),\ x \in \bar{\gamma}_1 \cup \bar{\gamma}_m \end{cases} +$$

$$+O(\exp(|\tau|x)),$$

$$\Delta(\lambda) = \rho\sin\rho\pi\begin{cases} 1/2,\ x \in \bar{\gamma}_i\ (i = \overline{2,m-1}) \\ 1,\ x \in \bar{\gamma}_1 \cup \bar{\gamma}_m \end{cases} +$$

$$+O\left(\frac{1}{|\rho|}\exp(|\tau|x)\right), \rho \in G_\delta.$$

Доказательство. Асимптотические формулы (22) получаются из представлений (14),(19) для функций $\varphi_k(x,\lambda)\left(k = \overline{1,m}\right)$ и $\Delta(\lambda)$, используя асимптотические формулы для функций $u(x,\lambda), v(x,\lambda)$ и определителя $\delta(\lambda)$ [4]: при $|\rho| \to +\infty$ $u(x,\lambda) = \cos\rho x + O\left(\dfrac{1}{|\rho|}\exp(|\tau|x)\right)$,
$u'(x,\lambda) = -\rho\sin\rho x + O(\exp(|\tau|x))$,
$v(x,\lambda) = \cos\rho(\pi - x) + O\left(\dfrac{1}{|\rho|}\exp(|\tau|x)\right)$,
$v'(x,\lambda) = \rho\sin\rho(\pi - x) + O(\exp(|\tau|x))$,
$\delta(\lambda) = -\rho\sin\rho\pi\left[1 + \mathrm{O}(\exp(|\tau|x))\right]$ при $\rho \in G_\delta$.

Следствие. Краевая задача (7)—(9) имеет счетное множество собственных значений $\{\lambda_n\}_{n\geq 0}$, при этом $\rho_n = \sqrt{\lambda_n} = n + O(1/n)$, асимптотические формулы для собственных функций получаются из соотношений (22) при $\lambda = \lambda_n$.

Функцией Грина краевой задачи (7)—(9) [1] назовем функцию $G(x,t,\lambda)$ такую, что решение полуоднородной задачи $-y'' + q(x)y - \lambda y = f(x)$, $U_k(y) = 0\left(k = \overline{1,m-1}\right)$, $V(y) = 0$ при любой функции $f(x)$ может быть представлено в виде

$$y(x,\lambda) = \int\limits_\Gamma G(x,t;\lambda)f(t)dt,$$

т.е. функция $y(x,\lambda)$ представляется истокообразно при помощи ядра $G(x,t,\lambda)$.

Определим $G(x,t,\lambda)$ соотношением

$$G(x,t,\lambda) = G_0(x,t,\lambda) + g(x,\lambda),$$

где

$$G_{\substack{0\\(i=\overline{1,m})}}(x,t,\lambda) =$$

$$= \frac{\delta_{ik}}{\Delta(\lambda)_{\bar{\gamma}_k}}\begin{cases} \begin{cases} \varphi_k(x,\lambda)\varphi_m(t,\lambda),\ x \leq t \\ \varphi_k(t,\lambda)\varphi_m(x,\lambda),\ t \leq x \end{cases}, \\ \qquad x \in \bar{\gamma}_k, t \in \bar{\gamma}_i, k = \overline{1,m-1} \\ \begin{cases} \varphi_1(x,\lambda)\varphi_m(t,\lambda),\ x \geq t \\ \varphi_1(t,\lambda)\varphi_m(x,\lambda),\ t \geq x \end{cases}, \\ \qquad x \in \bar{\gamma}_k\ (k = \overline{1,m}), \end{cases}$$

$$g(x,\lambda) = c_k\varphi_k(x,\lambda), x \in \bar{\gamma}_k (k = \overline{1,m}),$$

$c_k, (k = \overline{1,m})$ определяются как решение системы m линейных алгебраических уравнений, порожденной условиями непрерывности решения $y(x,\lambda)$ в узле $\dfrac{\pi}{2}$ и включением $y_0(x) \in \Im(t \in \bar{\Gamma})$;

$$\begin{cases} u\left(\dfrac{\pi}{2},\lambda\right)c_k - u\left(\dfrac{\pi}{2},\lambda\right)c_m \underset{(k=\overline{1,m-1})}{=} G_0(x,t,\lambda)_{x=\frac{\pi}{2}\in\bar{\gamma}_m} - \\ \qquad -G_0(x,t,\lambda)_{x=\frac{\pi}{2}\in\bar{\gamma}_k}, \\ \sum\limits_{k=1}^{m-1} u'\left(\dfrac{\pi}{2},\lambda\right)c_k + u'\left(\dfrac{\pi}{2},\lambda\right)c_m = \dfrac{\partial G_0}{\partial x}(x,t,\lambda)_{x=\frac{\pi}{2}\in\bar{\gamma}_m} - \\ \qquad -\sum\limits_{k=1}^{m-1} \dfrac{\partial G_0}{\partial x}(x,t,\lambda)_{x=\frac{\pi}{2}\in\bar{\gamma}_k}, \end{cases} \tag{23}$$

Определитель $D(\lambda)$ системы (18): $D(\lambda) = m\left(u\left(\dfrac{\pi}{2},\lambda\right)\right)^{m-1} u'\left(\dfrac{\pi}{2},\lambda\right)$; вспомогательные определители $D_k(t,\lambda)(k=\overline{1,m})$: $D_k(t,\lambda)_{\bar{\gamma}_i} = \dfrac{2}{\hat{\Delta}(\lambda)}(1-m\tilde{\delta}_{ki})(u\left(\dfrac{\pi}{2},\lambda\right))^{m-1}u'\left(\dfrac{\pi}{2},\lambda\right)\varphi_i(t,\lambda)_{\bar{\gamma}_i}$ $(k,i=\overline{1,m})$, где $\tilde{\delta}_{ki} = \begin{cases} 1/2, & k=1,m \\ k=\overline{2,m-1} \end{cases}$, $i=\overline{1,m}$.

Коэффициенты $c_k \equiv c_k(t,\lambda)(k=\overline{1,m})$ определяются соотношениями:

$$c_k(t,\lambda)_{\bar{\gamma}_i} = \frac{2}{m\hat{\Delta}(\lambda)}(1-m\tilde{\delta}_{ki})\varphi_i(t,\lambda)_{\bar{\gamma}_i}, \quad i=\overline{1,m}(k=\overline{1,m}).$$

Таким образом функция Грина краевой задачи (7)—(9) принимает вид

$$G(x,t,\lambda) = G_0(x,t,\lambda) + c_k(t,\lambda)\varphi_k(x,\lambda), \quad x \in \bar{\gamma}_k\left(k=\overline{1,m}\right). \tag{24}$$

Разложение по собственным функциям. Пусть $\{\lambda_n\}_{n\ge0}$ — собственные значения краевой задачи (7)—(9), $\{\varphi(x,\lambda_n)\}_{n\ge0}$ — соответствующие им собственные функции; при этом каждое собственное значение в последовательности $\{\lambda_n\}_{n\ge0}$ повторяется столько раз, сколько ему соответствует линейно независимых собственных функций.

Не нарушая общности, можно считать, что однородная краевая задача (7),(9) при $\lambda=0$ имеет лишь тривиальное решение. В противном случае достаточно провести сдвиг спектра на любое число, отличное от всех собственных значений. Такое число заведомо существует, ибо оператор L имеет не более счетного множества собственных значений. Рассмотрим функцию $f(x)$ из области определения оператора L. Положим $F(x)=(Lf)(x)$, тогда

$$f(x) = \int_\Gamma G(x,t)F(t)\,dt,$$
$$G(x,t) = G(x,t,0), \quad x,t \in \bar{\Gamma}\times\bar{\Gamma},$$

т.е. функция $f(x)$ представляется истокообразно при помощи непрерывного ядра $G(x,t)$, $x,t \in \bar{\Gamma}\times\bar{\Gamma}$.

На основании теоремы Гильберта—Шмидта [5] функцию $f(x)$ можно разложить в равномерно сходящийся ряд по собственным функциям ядра $G(x,t)$, т.е. по собственным функциям оператора L. Так как область определения оператора L плотна в $L^2(\Gamma)$, то система собственных функций $\{\varphi(x,\lambda_n)\}_{n\ge0}$ краевой задачи (7), (9) на многообразии $\Im$ полна и образует ортогональный базис в $L_2(\Gamma)$; имеет место разложение $f(x)$ в обобщенный ряд Фурье:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\varphi_n(x,\lambda_n), \quad a_n = \frac{1}{\omega_n}\int_\Gamma f(t)\varphi_n(t,\lambda_n)dt. \tag{25}$$

Система собственных функций $\{\varphi(x,\lambda_n)\}_{n\ge0}$ краевой задачи (7)—(9) определяет систему функций $\{X_n(\xi)\}_{n\ge0}$ (для этого необходимо провести действия, обратные формулам подстановки Лопиталя). Пусть, далее, разложения в ряд Фурье функций $Q_0(\xi), Q_1(\xi)$, имеют вид

$$Q_0(\xi) = \sum_{n=0}^{\infty} Q_n^0 X_n(\xi), \quad Q_1(\xi) = \sum_{n=0}^{\infty} Q_n^1 X_n(\xi),$$

где Q_n^0, Q_n^1 — коэффициенты Фурье функций $Q_n^0(\xi), Q_n^1(\xi)$, соответственно. Решение граничной задачи (3)—(6) принимает вид:

$$Q(\xi,t) = \sum_{n=0}^{\infty}[Q_n^0\cos\lambda_n t + \frac{Q_n^1}{\lambda_n}\sin\lambda_n t]X_n(\xi) + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{X(\xi)}{\lambda_n}\int_0^t \sin\lambda_n(t-\tau)d\tau. \tag{26}$$

Равномерная и абсолютная сходимость ряда (26) на $\bar{\Gamma}\times[0,\infty)$ показываются стандартными рассуждениями.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Покорный Ю.В., Пенкин О.М., Прядиев В.Л., Боровских А.В., Лазарев К.П., Шабров С.А.* Дифференциальные уравнения на геометрических графах. — М.: Физматлит, 2004. – 227 с.

2. *Левитан Б.М., Саргсян И.С.* Введение в спектральную теорию. — М.: Наука, 1970. — 381 с.

3. *Титчмарш Э.Ч.* Разложения по собственным функциям, связанные с дифференциальными уравнениями второго порядка. — М.: ИЛ, 1960. — Т. 1 — 342 с.

4. *Юрко В.А.* Обратные спектральные задачи и их приложения. — Саратов: Изд-во Саратовского педагогического института, 2001. — 499 с.

5. *Петровский И.Г.* Лекции по теории интегральных уравнений. – М.: Гостехиздат, Изд. 2, 1995. — 347 с.