УДК 519.248

МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИФФУЗИИ ВЕЩЕСТВА В ПЛОСКОЙ СЛУЧАЙНО-НЕОДНОРОДНОЙ СРЕДЕ

М. М. Боровикова, В. Г. Задорожний

Распространение вещества в плоской случайно-неоднородной среде моделируется двумерным уравнением в частных производных со случайными коэффициентами. Получены формулы для моментных функций решения.

1. Постановка задачи и обозначения. Задача о диффузии вещества в плоской среде возникает в экологии при прогнозировании состояния окружающей среды при выбросах или захоронениях вредных веществ, при строительстве гидросооружений, при покрытии металлов и др. Процесс диффузии описывается дифференциальным уравнением [2]

$$\frac{\partial u(t,x_1,x_2)}{\partial t} = \varepsilon_1(t)\frac{\partial^2 u(t,x_1,x_2)}{\partial x_1^2} + \varepsilon_2(t)\frac{\partial^2 u(t,x_1,x_2)}{\partial x_2^2} + \varepsilon_3(t)u(t,x_1,x_2) + f(t,x_1,x_2), \tag{1}$$

где t — время, $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ — коэффициенты диффузии, которые зависят от плотности вещества, температуры, угла наклона, f — плотность источников диффундирующего вещества. Если диффузия связана, например, с выделением или поглощением тепла, то присутствует слагаемое $\varepsilon_3 u$. Мы будем моделировать изменение $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, f$ случайными процессами. При этом решение уравнения также является случайным процессом, и наибольший интерес представляют математическое ожидание и дисперсионная функция решения.

Отыскание моментных функций решения является достаточно сложной задачей. Для этого используются разные подходы. Строят уравнения для моментных функций. При этом получается бесконечная система связанных уравнений. Иногда такую систему удается замкнуть [6, 7]. Получают уравнения для плотности распределения вероятностей решения [8, 9]. Строят разложения по малым случайным возмущениям [11]. Другие подходы можно найти в [5, 10, 12, 13, 14]. Для одномерного уравнения теплопроводности выражения для моментных функций решения получены в [15].

Пусть R — вещественная ось, C — комплексная плоскость, $[t_0, t_1] = T \subset R$, $L_1(T)$ — пространство суммируемых на отрезке T функций, $L_\infty(T)$ — пространство существенно ограниченных на T функций [1], $F_x[f](\xi)$ — преобразование Фурье [2] по переменному $x = (x_1, x_2)$, F_ξ^{-1} — обратное преобразование Фурье по переменному $\xi = (\xi_1, \xi_2)$, знак $\overset{x}{*}$ обозначает свертку функций по переменному x.

Пусть X — банахово пространство функций на отрезке T и $y : X \to C$. Если дифференциал Фреше [3, с. 469] $dy(x_0, h)$ этого функционала в точке x_0 имеет вид

$$dy(x_0,h) = \int_T \varphi(t,x_0)h(t)dt,$$

где интеграл понимается в смысле Лебега, $\varphi : T \times X \to C$, то $\varphi(t, x_0)$ называется *вариационной (функциональной) производной* (см. [4], [5]) функционала y в точке x_0 и обозначается $\dfrac{\delta y(x_0)}{\delta x(t)}$.

Будем предполагать, что случайные процессы $\varepsilon_1(t)$, $\varepsilon_2(t)$, $\varepsilon_3(t)$, $f(t,x_1,x_2)$ заданы характеристическим функционалом

$$\psi(v_1,v_2,v_3,\omega) = M(h(v_1,v_2,v_3,\omega)),$$

где M — знак математического ожидания по функции распределения процессов $\varepsilon_1(t), \varepsilon_2(t)$, $\varepsilon_3(t), f(t,x_1,x_2)$ и

$$h(v_1,v_2,v_3,\omega) = \exp\Bigg(i\int_T [\varepsilon_1(s)v_1(s) + \varepsilon_2(s)v_2(s) + \varepsilon_3(s)v_3(s)]ds + i\int_T\int_{R^2} f(s,\tau_1,\tau_2)\omega(s,\tau_1,\tau_2)d\tau_1 d\tau_2 ds \Bigg),$$

$$v_1, v_2, v_3 \in L_1(T), \ \ \omega \in L_1(T \times R^2).$$

Для уравнения (1) рассматривается задача с начальным условием

$$u(t_0,x_1,x_2) = g(x_1,x_2), \tag{2}$$

где g — независящий от $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, f$ случайный процесс. Задача состоит в нахождении моментных функций решения задачи (1), (2).

2. Уравнение для характеристического функционала. Введем обозначения

$$p(v_1, v_2, v_3, \omega, z) =$$

$$= \exp\left(i\int_T [\varepsilon_1(s)v_1(s) + \varepsilon_2(s)v_2(s) + \varepsilon_3(s)v_3(s)]ds + \right.$$

$$+i\int_T \int_{R^2} [f(s,\tau_1,\tau_2)\omega(s,\tau_1,\tau_2) +$$

$$\left. +u(s,\tau_1,\tau_2)z(s,\tau_1,\tau_2)]d\tau_1 d\tau_2 ds \right),$$

$$Y(v_1, v_2, v_3, \omega, z) = M(p(v_1, v_2, v_3, \omega, z)),$$

где $z \in L_1(T \times R^2)$, M — знак математического ожидания по функции распределения процессов $\varepsilon_1(t)$, $\varepsilon_2(t)$, $\varepsilon_3(t)$, $f(t, x_1, x_2)$, $u(t, x_1, x_2)$.

Умножим уравнение (1) на $p(v_1, v_2, v_3, \omega, z)$. При этом математическое ожидание полученного равенства формально можно записать с помощью отображения Y в виде

$$\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial t}\frac{\delta Y}{\delta z(t,x_1,x_2)} = \frac{1}{i^2}\frac{\delta}{\delta v_1(t)}\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} \times$$

$$\times\frac{\delta Y}{\delta z(t,x_1,x_2)} + \frac{1}{i^2}\frac{\delta}{\delta v_2(t)}\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}\frac{\delta Y}{\delta z(t,x_1,x_2)} +$$

$$+\frac{1}{i^2}\frac{\delta}{\delta v_3(t)}\frac{\delta Y}{\delta z(t,x_1,x_2)} + \frac{1}{i}\frac{\delta Y}{\delta \omega(t,x_1,x_2)}$$

или

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{\delta Y}{\delta z(t,x_1,x_2)} = -i\frac{\delta}{\delta v_1(t)}\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}\frac{\delta Y}{\delta z(t,x_1,x_2)} -$$

$$-i\frac{\delta}{\delta v_2(t)}\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}\frac{\delta Y}{\delta z(t,x_1,x_2)} - i\frac{\delta}{\delta v_3(t)}\frac{\delta Y}{\delta z(t,x_1,x_2)} + \quad (3)$$

$$+\frac{\delta Y}{\delta \omega(t,x_1,x_2)}.$$

Умножая (2) на $p(v_1, v_2, v_3, \omega, z)$ и переходя к средним значениям, получаем

$$\left.\frac{\delta Y(v_1,v_2,v_3,\omega,z)}{\delta z(t,x_1,x_2)}\right|_{t=t_0} = \quad (4)$$

$$= iM(g(x_1,x_2)p(v_1,v_2,v_3,\omega,z)).$$

Таким образом, для Y получена детерминированная задача (3), (4), причем коэффициенты уравнения (3) не зависят от статистических характеристик процессов $\varepsilon_1(t)$, $\varepsilon_2(t)$, $\varepsilon_3(t)$, $f(t, x_1, x_2)$, $g(x_1, x_2)$. Если известно Y, то легко находятся моментные функции решения задачи (1), (2) и даже корреляционные функции процессов $\varepsilon_1(t)$, $\varepsilon_2(t)$, $\varepsilon_3(t)$, $f(t, x_1, x_2)$, $u(t, x_1, x_2)$. Например,

$$Mu(t, x_1, x_2) =$$

$$= \frac{1}{i}\left.\frac{\delta Y\left(v_1,v_2,v_3,\omega,z\right)}{\delta z\left(t,x_1,x_2\right)}\right|_{v_1=0,v_2=0,v_3=0,\omega=0,z=0},$$

$$M(u(t,x_1,x_2)\varepsilon_1(s)) =$$

$$= -\left.\frac{\delta^2 Y(v_1,v_2,v_3,\omega,z)}{\delta z(t,x_1,x_2)\delta v_1(s)}\right|_{v_1=0,v_2=0,v_3=0,\omega=0,z=0}.$$

Таким образом, важно найти решение задачи (3), (4) в малой окрестности точки $(0,0,0,0,0)$ переменных $(v_1, v_2, v_3, \omega, z)$.

3. Степенной ряд для характеристического функционала. Будем искать решение задачи (3), (4) в виде степенного ряда

$$Y = Y_0(v_1, v_2, v_3, \omega) +$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{i^k}{k!}\int\ldots\int Y_k(v_1, v_2, v_3, \omega, s_1, \ldots,$$

$$s_k, x_1^1, \ldots, x_1^k, x_2^1, \ldots, x_2^k) \times$$

$$\times z(s_1, x_1^1, x_2^1)z(s_2, x_1^2, x_2^2)\ldots z(s_k, x_1^k, x_2^k) \times$$

$$\times ds_1 \ldots ds_k dx_1^1 \ldots dx_1^k dx_2^1 \ldots dx_2^k,$$

где интегралы по переменным $s_1, \ldots, s_k$ вычисляются по промежутку T, по переменным $x_1^1, \ldots, x_1^k$ по R и по переменным $x_2^1, \ldots, x_2^k$ — по R, отображения Y_k симметричны по тройкам переменных (s_i, x_1^i, x_2^i), $i = 1, 2, \ldots, k$. Полагая в этом равенстве $z = 0$, из определения Y и ψ получаем

$$Y(v_1, v_2, v_3, \omega, 0) =$$

$$= \psi(v_1, v_2, v_3, \omega) = Y_0(v_1, v_2, v_3, \omega).$$

Подставим разложение для Y в уравнение (3), получим

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{i^k}{(k-1)!}\int\ldots\int\frac{\partial}{\partial t}Y_k(v_1, v_2, v_3, \omega, t, s_2, \ldots,$$

$$s_k, x_1, x_1^2, \ldots, x_1^k, x_2, x_2^2, \ldots, x_2^k) \times$$

$$\times z(s_2, x_1^2, x_2^2)\ldots z(s_k, x_1^k, x_2^k) \times$$

$$\times ds_2 \ldots ds_k dx_1^2 \ldots dx_1^k dx_2^2 \ldots dx_2^k =$$

$$= -i\sum_{k=1}^{\infty}\frac{i^k}{(k-1)!}\int\ldots\int\frac{\delta}{\delta v_1(t)}\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} \times$$

$$\times Y_k(v_1, v_2, v_3, \omega, t, s_2, \ldots, s_k, x_1, x_1^2, \ldots,$$

$$x_1^k, x_2, x_2^2, \ldots, x_2^k)z(s_2, x_1^2, x_2^2)\ldots z(s_k, x_1^k, x_2^k) \times$$

$$\times ds_2 \ldots ds_k dx_1^2 \ldots dx_1^k dx_2^2 \ldots dx_2^k -$$

$$-i\sum_{k=1}^{\infty}\frac{i^k}{(k-1)!}\int\ldots\int\frac{\delta}{\delta v_2(t)}\frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \times$$

$$\times Y_k(v_1, v_2, v_3, \omega, t, s_2, \ldots, s_k, x_1, x_1^2, \ldots,$$

$$x_1^k, x_2, x_2^2, \ldots, x_2^k)z(s_2, x_1^2, x_2^2)\ldots z(s_k, x_1^k, x_2^k) \times$$

$$\times ds_2 \ldots ds_k dx_1^2 \ldots dx_1^k dx_2^2 \ldots dx_2^k -$$

$$-i\sum_{k=1}^{\infty}\frac{i^k}{(k-1)!}\int\ldots\int\frac{\delta}{\delta v_3(t)}\times$$
$$\times Y_k(v_1,v_2,v_3,\omega,t,s_2,\ldots,s_k,x_1,x_1^2,\ldots,$$
$$x_1^k,x_2,x_2^2,\ldots,x_2^k)z(s_2,x_1^2,x_2^2)\ldots z(s_k,x_1^k,x_2^k)\times$$
$$\times ds_2\ldots ds_k dx_1^2\ldots dx_1^k dx_2^2\ldots dx_2^k+\frac{\delta Y_0(v_1,v_2,v_3,\omega)}{\delta\omega(t,x_1,x_2)}+$$
$$+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{i^k}{k!}\int\ldots\int\frac{\delta}{\delta\omega(t,x_1,x_2)}\times$$
$$\times Y_k(v_1,v_2,v_3,\omega,s_1,\ldots,s_k,x_1^1,\ldots,$$
$$x_1^k,x_2^1,\ldots,x_2^k)z(s_1,x_1^1,x_2^1)\ldots z(s_k,x_1^k,x_2^k)\times$$
$$\times ds_1\ldots ds_k dx_1^1\ldots dx_1^k dx_2^1\ldots dx_2^k.$$

Приравнивая степени по переменной z, получим

$$\frac{\partial}{\partial t}Y_k(v_1,v_2,v_3,\omega,t,s_2,\ldots,s_k,x_1,x_1^2,\ldots,$$
$$x_1^k,x_2,x_2^2,\ldots,x_2^k)z(s_2,x_1^2,x_2^2)\ldots z(s_k,x_1^k,x_2^k)=$$
$$=-i\frac{\delta}{\delta v_1(t)}\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}Y_k(v_1,v_2,v_3,\omega,t,s_2,\ldots,s_k,$$
$$x_1,x_1^2,\ldots,x_1^k,x_2,x_2^2,\ldots,x_2^k)\times z(s_2,x_1^2,x_2^2)\ldots z\left(s_k,x_1^k,x_2^k\right)-$$
$$-i\frac{\delta}{\delta v_2(t)}\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}Y_k(v_1,v_2,v_3,\omega,t,s_2,\ldots,s_k,$$
$$x_1,x_1^2,\ldots,x_1^k,x_2,x_2^2,\ldots,x_2^k)\times$$
$$\times z(s_2,x_1^2,x_2^2)\ldots z(s_k,x_1^k,x_2^k)-$$
$$-i\frac{\delta}{\delta v_3(t)}Y_k(v_1,v_2,v_3,\omega,t,s_2,\ldots,s_k,x_1,x_1^2,\ldots,x_1^k,$$
$$x_2,x_2^2,\ldots,x_2^k)\times z(s_2,x_1^2,x_2^2)\ldots z(s_k,x_1^k,x_2^k)-$$
$$-i\frac{\delta}{\delta\omega(t,x_1,x_2)}Y_{k-1}(v_1,v_2,v_3,\omega,s_2,\ldots,s_k,$$
$$x_1^2,\ldots,x_1^k,x_2^2,\ldots,x_2^k)\times z(s_2,x_1^2,x_2^2)\ldots z(s_k,x_1^k,x_2^k)$$

при $k=1,2,\ldots$ и при всех $z(s_2,x_1^2,x_2^2),\ldots,z(s_k,x_1^k,x_2^k)\in L_1(T\times R^2)$. Это равносильно равенствам

$$\frac{\partial}{\partial t}Y_k(v_1,v_2,v_3,\omega,t,s_2,\ldots,s_k,x_1,x_1^2,\ldots,$$
$$x_1^k,x_2,x_2^2,\ldots,x_2^k)=-i\frac{\delta}{\delta v_1(t)}\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}\times$$
$$\times Y_k(v_1,v_2,v_3,\omega,t,s_2,\ldots,s_k,x_1,x_1^2,\ldots,$$
$$x_1^k,x_2,x_2^2,\ldots,x_2^k)-i\frac{\delta}{\delta v_2(t)}\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}\times Y_k(v_1,v_2,v_3,\omega,t, \tag{5}$$
$$s_2,\ldots,s_k,x_1,x_1^2,\ldots,x_1^k,x_2,x_2^2,\ldots,x_2^k)-i\frac{\delta}{\delta v_3(t)}\times$$
$$\times Y_k(v_1,v_2,v_3,\omega,t,s_2,\ldots,s_k,$$
$$x_1,x_1^2,\ldots,x_1^k,x_2,x_2^2,\ldots,x_2^k)-i\frac{\delta}{\delta\omega(t,x_1,x_2)}\times$$
$$\times Y_{k-1}(v_1,v_2,\omega,s_2,\ldots,s_k,x_1^2,\ldots,x_1^k,x_2^2,\ldots,x_2^k)$$

при $k=1,2,\ldots$

Вычислим вариационную производную $(k-1)$-го порядка по z от выражения (4) в точке $(v_1,v_2,v_3,\omega,0,t_0,\ldots,t_0,x_1^1,\ldots,x_1^k,x_2^1,\ldots,x_2^k)$. Учитывая независимость случайного процесса $g(x_1,x_2)$ от $\varepsilon_1(t),\varepsilon_2(t),\varepsilon_3(t),f(t,x_1,x_2)$, получим

$$i^kY_k(v_1,v_2,v_3,\omega,t_0,\ldots,t_0,x_1^1,\ldots,x_1^k,x_2^1,\ldots,x_2^k)=$$
$$=i^kM(g(x_1^1,x_2^1)\ldots g(x_1^k,x_2^k)p(v_1,v_2,v_3,\omega,0))=$$
$$=i^kM(g(x_1^1,x_2^1)\ldots g(x_1^k,x_2^k))\psi(v_1,v_2,v_3,\omega),$$
$$k=1,2,\ldots,$$

т. е.

$$Y_k(v_1,v_2,v_3,\omega,t_0,\ldots,t_0,x_1^1,\ldots,x_1^k,x_2^1,\ldots,x_2^k)=$$
$$=M(g(x_1^1,x_2^1)\ldots g(x_1^k,x_2^k))\psi(v_1,v_2,v_3,\omega), \tag{6}$$
$$k=1,2,\ldots$$

Получили рекуррентную последовательность детерминированных задач (5), (6) для нахождения коэффициентов Y_k.

Если $Y(v_1,v_2,v_3,\omega,z)$ — характеристический функционал случайных процессов $\varepsilon_1(t),\varepsilon_2(t),\varepsilon_3(t),f(t,x_1,x_2),u(t,x_1,x_2)$, то

$$Y_k(0,0,0,0,s_1,\ldots,s_k,x_1^1,\ldots,x_1^k,x_2^1,\ldots,x_2^k)=$$
$$=i^{-k}\left.\frac{\delta^kY(v_1,v_2,v_3,\omega,z)}{\delta z(s_1,x_1^1,x_2^1)\ldots\delta z(s_k,x_1^k,x_2^k)}\right|_{v_1=0,v_2=0,v_3=0,\omega=0,z=0}=$$
$$=M(u(s_1,x_1^1,x_2^1)\ldots u(s_k,x_1^k,x_2^k)).$$

Последнее является основанием для следующего определения.

Определение. Пусть $Y_k(v_1,v_2,v_3,\omega,s_1,\ldots,s_k,x_1^1,\ldots,x_1^k,x_2^1,\ldots,x_2^k)$ является симметрическим по переменным s_i,x_1^i,x_2^i, $i=1,2,\ldots,k$, решением, в смысле обобщенных функций (в классическом смысле), задачи (5), (6); тогда $Y_k(0,0,0,0,s_1,\ldots,s_k,x_1^1,\ldots,x_1^k,x_2^1,\ldots,x_2^k)$ называется *моментной функцией k-го порядка* решения задачи (1), (2), в смысле обобщенных функций (в классическом смысле).

4. Решение дифференциального уравнения третьего порядка с обычными и вариационными производными. Уравнения (5) одного типа. Имеет смысл сначала исследовать этот тип уравнений. Рассмотрим задачу с начальным условием

$$\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial t}y(v_1,v_2,v_3,t,x_1,x_2)=\\&=-i\frac{\delta}{\delta v_1(t)}\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}y(v_1,v_2,v_3,t,x_1,x_2)-\\&-i\frac{\delta}{\delta v_2(t)}\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}y(v_1,v_2,v_3,t,x_1,x_2)-\\&-i\frac{\delta}{\delta v_3(t)}y(v_1,v_2,v_3,t,x_1,x_2)+b(v_1,v_2,v_3,t,x_1,x_2),\end{aligned} \tag{7}$$

$$y(v_1, v_2, v_3, t_0, x_1, x_2) = y_0(v_1, v_2, v_3, x_1, x_2), \quad (8)$$

где $v_1 \in L_1(T),\ v_2 \in L_1(T),\ v_3 \in L_1(T),\ t \in T,\ x_1 \in R,$ $x_2 \in R,\ y : L_1(T) \times L_1(T) \times L_1(T) \times T \times R^2 \to C$ — искомое отображение, b и y_0 заданы.

В дальнейшем $\chi(\tau, t, \cdot)$ обозначает характеристическую функцию отрезка $[\tau, t]$, т. е. $\chi(\tau, t, s) = 1$ при $s \in [\tau, t]$ и $\chi(\tau, t, s) = 0$ в противном случае.

В формулировке следующей теоремы отображение y_0 и его производные вычисляются в точках $(v_1 + i\xi_1^2\chi(t_0, t, \cdot), v_2 + i\xi_2^2\chi(t_0, t, \cdot), v_3 - i\chi(t_0, t, \cdot),$ $x_1, x_2)$, а отображение b и его производные вычисляются в точках $(v_1 + i\xi_1^2\chi(\tau, t, \cdot), v_2 + i\xi_2^2\chi(\tau, t, \cdot),$ $v_3 - i\chi(\tau, t, \cdot), \tau, x_1, x_2)$.

Теорема 1. *Пусть существует окрестность $U(r)$ нуля радиуса r в $L_1(T) \times L_1(T) \times L_1(T)$ такая, что при всех $(v_1, v_2, v_3) \in U(r)$ функции*

$$|y|, \left|\frac{\delta y_0}{\delta v_1(t)}\right|, \left|\frac{\delta y_0}{\delta v_2(t)}\right|, \left|\frac{\delta y_0}{\delta v_3(t)}\right|,$$

$$\left|F_x\left[\frac{\delta y_0}{\delta v_1(t)}\right](\xi)\right|, \left|F_x\left[\frac{\delta y_0}{\delta v_2(t)}\right](\xi)\right|,$$

$$\left|F_x\left[\frac{\delta y_0}{\delta v_3(t)}\right](\xi)\right|, \left|\xi_1^2 F_x[y_0](\xi)\right|, \left|\xi_2^2 F_x[y_0](\xi)\right|,$$

$$\left|\xi_1^2 F_x\left[\frac{\delta y_0}{\delta v_1(t)}\right](\xi)\right|, \left|\xi_2^2 F_x\left[\frac{\delta y_0}{\delta v_2(t)}\right](\xi)\right|,$$

$$|b|, \left|\frac{\delta b}{\delta v_1(t)}\right|, \left|\frac{\delta b}{\delta v_2(t)}\right|, \left|\frac{\delta b}{\delta v_3(t)}\right|,$$

$$\left|F_x\left[\frac{\delta b}{\delta v_1(t)}\right](\xi)\right|, \left|F_x\left[\frac{\delta b}{\delta v_2(t)}\right](\xi)\right|,$$

$$\left|F_x\left[\frac{\delta b}{\delta v_3(t)}\right](\xi)\right|, \left|\xi_1^2 F_x[b](\xi)\right|, \left|\xi_2^2 F_x[b](\xi)\right|,$$

$$\left|\xi_1^2 F_x\left[\frac{\delta b}{\delta v_1(t)}\right](\xi)\right|, \left|\xi_2^2 F_x\left[\frac{\delta b}{\delta v_2(t)}\right](\xi)\right|$$

при $t \in T,\ \tau \in T$ ограничены суммируемыми на R^2 функциями. Тогда

$$\begin{gathered} y(v_1, v_2, v_3, t, x_1, x_2) = F_\xi^{-1}[F_x[y_0(v_1 + \\ + i\xi_1^2\chi(t_0, t, \cdot), v_2 + i\xi_2^2\chi(t_0, t, \cdot), v_3 - \\ - i\chi(t_0, t, \cdot), x_1, x_2)](\xi)](x) + \\ + \int_{t_0}^{t} F_\xi^{-1}[F_x[b(v_1 + i\xi_1^2\chi(\tau, t, \cdot), v_2 + \\ + i\xi_2^2\chi(\tau, t, \cdot), v_3 - i\chi(\tau, t, \cdot), \tau, x_1, x_2)](\xi)](x)d\tau \end{gathered} \quad (9)$$

является единственным решением задачи (7), (8).

Доказательство. Предположим, что существует преобразование Фурье по переменной x решения задачи (7), (8). Применяя преобразование Фурье к уравнениям (7), (8), получаем

$$\begin{gathered} \frac{\partial}{\partial t} F_x[y(v_1, v_2, v_3, t, x_1, x_2)](\xi) = \\ = -i\frac{\delta}{\delta v_1(t)}(-i\xi_1)^2 F_x[y(v_1, v_2, v_3, t, x_1, x_2)](\xi) - \\ -i\frac{\delta}{\delta v_2(t)}(-i\xi_2)^2 F_x[y(v_1, v_2, v_3, t, x_1, x_2)](\xi) - \\ -i\frac{\delta}{\delta v_3(t)} F_x[y(v_1, v_2, v_3, t, x_1, x_2)](\xi) + \\ + F_x[b(v_1, v_2, v_3, t, x_1, x_2)](\xi), \end{gathered} \quad (10)$$

$$\begin{gathered} F_x[y(v_1, v_2, v_3, t_0, x_1, x_2)](\xi) = \\ = F_x[y_0(v_1, v_2, v_3, x_1, x_2)](\xi). \end{gathered} \quad (11)$$

Эта задача имеет вид

$$\begin{gathered} \frac{\partial Y(v_1, v_2, v_3, t)}{\partial t} = a_1(t)\frac{\delta Y(v_1, v_2, v_3, t)}{\delta v_1(t)} + \\ + a_2(t)\frac{\delta Y(v_1, v_2, v_3, t)}{\delta v_2(t)} + a_3(t)\frac{\delta Y(v_1, v_2, v_3, t)}{\delta v_3(t)} + \\ + B(v_1, v_2, v_3, t), \\ Y(v_1, v_2, v_3, t_0) = Y_0(v_1, v_2, v_3). \end{gathered}$$

Такая задача изучена в [13]. Оказывается, если функции $a_i : T \to C,\ i = 1, 2, 3,$ непрерывны и существуют вариационные производные

$$\frac{\delta Y_0(v_1 + a_1\chi(t_0, t, \cdot), v_2 + a_2\chi(t_0, t, \cdot), v_3 + a_3\chi(t_0, t, \cdot))}{\delta v_i(t)},$$

$$\frac{\delta B(v_1 + a_1\chi(\tau, t, \cdot), v_2 + a_2\chi(\tau, t, \cdot), v_3 + a_3\chi(\tau, t, \cdot))}{\delta v_i(t)},$$

$i = 1, 2, 3,\ t_0 \le \tau \le t,$ то

$$\begin{gathered} Y(v_1, v_2, v_3, t) = \\ = Y_0(v_1 + a_1\chi(t_0, t, \cdot), v_2 + a_2\chi(t_0, t, \cdot), v_3 + a_3\chi(t_0, t, \cdot)) + \\ + \int_{t_0}^{t} B(v_1 + a_1\chi(\tau, t, \cdot), v_2 + a_2\chi(\tau, t, \cdot), v_3 + a_3\chi(\tau, t, \cdot), \tau)d\tau \end{gathered}$$

является единственным решением последней задачи. (Это можно проверить, вычислив производную $\dfrac{\partial Y(v_1, v_2, v_3, t)}{\partial t}$ и подставив в уравнение).

Воспользовавшись этим результатом, находим решение задачи (10), (11)

$$\begin{gathered} F_x[y(v_1, v_2, v_3, t, x_1, x_2)](\xi) = F_x\left[y_0(v_1 + i\xi_1^2\chi(t_0, t, \cdot), v_2 + \right. \\ \left. + i\xi_2^2\chi(t_0, t, \cdot), v_3 - i\chi(t_0, t, \cdot), x_1, x_2)\right](\xi) + \\ + \int_{t_0}^{t} F_x\left[b(v_1 + i\xi_1^2\chi(\tau, t, \cdot), v_2 + i\xi_2^2\chi(\tau, t, \cdot), v_3 - \right. \\ \left. - i\chi(\tau, t, \cdot), \tau, x_1, x_2)\right](\xi)\ d\tau. \end{gathered}$$

Для получения формулы (9) нужно применить к последнему равенству обратное преобразование Фурье.

Подставим (9) в уравнение (10). Предположения теоремы о существовании суммируемых мажорант обеспечивают существование вариационных производных по v_i, $i = 1,2,3$, и смешанных производных, а также обеспечивают дифференцируемость под знаками интегралов. При этом получается тождество, что и доказывает теорему.

5. Математическое ожидание решения задачи (1), (2). Для нахождения математического ожидания решения задачи (1), (2) выпишем задачу (5), (6) при $k = 1$:

$$\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial t}Y_1(v_1,v_2,v_3,\omega,t,x_1,x_2) =\\ &= -i\frac{\delta}{\delta v_1(t)}\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}Y_1(v_1,v_2,v_3,\omega,t,x_1,x_2) -\\ &-i\frac{\delta}{\delta v_2(t)}\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}Y_1(v_1,v_2,v_3,\omega,t,x_1,x_2) -\\ &-i\frac{\delta}{\delta v_3(t)}Y_1(v_1,v_2,v_3,\omega,t,x_1,x_2) -\\ &-i\frac{\delta}{\delta\omega(t,x_1,x_2)}\psi(v_1,v_2,v_3,\omega),\end{aligned} \tag{12}$$

$$Y_1(v_1,v_2,v_3,\omega,t_0,x_1,x_2) = Mg(x_1,x_2)\psi(v_1,v_2,v_3,\omega). \tag{13}$$

Теорема 2. *Пусть функция $Mg(x_1,x_2)$ суммируема на R^2 и при малых $\omega \in L_1(T\times R^2)$ выполняются условия предыдущей теоремы. Тогда*

$$\begin{aligned}Y_1(v_1,v_2,v_3,\omega,t,x_1,x_2) = Mg(x_1,x_2)\overset{x}{*}F_\xi^{-1}[\psi(v_1+i\xi_1^2\chi(t_0,t,\cdot),v_2+i\xi_2^2\chi(t_0,t,\cdot),v_3-i\chi(t_0,t,\cdot),\omega)](x) -\\ -i\int_{t_0}^{t}F_\xi^{-1}\left[F_x\left[\frac{\delta\psi(v_1+i\xi_1^2\chi(\tau,t,\cdot),v_2+i\xi_2^2\chi(\tau,t,\cdot),v_3-i\chi(\tau,t,\cdot),\omega)}{\delta\omega(\tau,x_1,x_2)}\right](\xi)\right](x)d\tau\end{aligned} \tag{14}$$

является единственным решением задачи (12), (13).

Доказательство. По формуле (9) получаем решение задачи (12), (13)

$$Y_1(v_1,v_2,v_3,\omega,t,x_1,x_2) = F_\xi^{-1}[F_x[Mg(x_1,x_2)\psi(v_1+i\xi_1^2\chi(t_0,t,\cdot),v_2+i\xi_2^2\chi(t_0,t,\cdot),v_3 -$$

$$-i\chi(t_0,t,\cdot),\omega)](\xi)](x) - i\int_{t_0}^{t}F_\xi^{-1}\left[F_x\left[\frac{\delta\psi(v_1+i\xi_1^2\chi(\tau,t,\cdot),v_2+i\xi_2^2\chi(\tau,t,\cdot),v_3-i\chi(\tau,t,\cdot),\omega)}{\delta\omega(\tau,x_1,x_2)}\right](\xi)\right](x)d\tau.$$

Далее,

$$\begin{aligned}&F_x[Mg(x_1,x_2)\psi(v_1+i\xi_1^2\chi(t_0,t,\cdot),v_2 +\\ &+i\xi_2^2\chi(t_0,t,\cdot),v_3-i\chi(t_0,t,\cdot),\omega)](\xi) =\\ &= F_x[Mg(x_1,x_2)](\xi)\psi(v_1+i\xi_1^2\chi(t_0,t,\cdot),v_2 +\\ &+i\xi_2^2\chi(t_0,t,\cdot),v_3-i\chi(t_0,t,\cdot),\omega).\end{aligned}$$

Поскольку обратное преобразование Фурье от произведения равно свертке обратных преобразований Фурье от сомножителей, то получаем (14). Теорема доказана.

Теорема 3. При выполнении условий теоремы 2

$$\begin{aligned}&Mu(t,x_1,x_2) =\\ &= Mg(x_1,x_2)\overset{x}{*}F_\xi^{-1}[\psi(i\xi_1^2\chi(t_0,t,\cdot),i\xi_2^2\chi(t_0,t,\cdot),-\\ &-i\chi(t_0,t,\cdot),0)](x) - i\int_{t_0}^{t}F_\xi^{-1}\times\\ &\times\left[F_x\left[\frac{\delta\psi(i\xi_1^2\chi(\tau,t,\cdot),i\xi_2^2\chi(\tau,t,\cdot),-i\chi(\tau,t,\cdot),0)}{\delta\omega(\tau,x_1,x_2)}\right](\xi)\right](x)d\tau\end{aligned} \tag{15}$$

является математическим ожиданием решения задачи (1), (2).

Доказательство получается подстановкой $v_1 = 0$, $v_2 = 0$, $v_3 = 0$, $\omega = 0$ в формулу (14).

6. Случай независимых процессов $f(t,x_1,x_2)$ и $\varepsilon_1(t)$, $\varepsilon_2(t)$, $\varepsilon_3(t)$. Формула (15) является достаточно общей, не требуется даже независимости случайных процессов $f(t,x_1,x_2)$, $\varepsilon_1(t),\varepsilon_2(t),\varepsilon_3(t)$.. При независимых процессах можно продвинуться дальше. Пусть $\varphi(v_1,v_2,v_3)$ — характеристический функционал процессов $\varepsilon_1(t),\varepsilon_2(t),\varepsilon_3(t)$.

Теорема 4. *Если случайный процесс $f(t,x_1,x_2)$ независит от случайных процессов $\varepsilon_1(t),\varepsilon_2(t),\varepsilon_3(t)$ и выполнены условия теоремы 2, то*

$$Mu(t,x_1,x_2)=$$
$$=Mg(x_1,x_2)\overset{x}{*}F_\xi^{-1}[\varphi(i\xi_1^2\chi(t_0,t,\cdot),i\xi_2^2\chi(t_0,t,\cdot),-$$
$$-i\chi(t_0,t,\cdot))](x)+\int_{t_0}^{t}F_\xi^{-1}[\varphi(i\xi_1^2\chi(\tau,t,\cdot),i\xi_2^2\times \qquad (16)$$
$$\times\chi(\tau,t,\cdot),-i\chi(\tau,t,\cdot))](x)\overset{x}{*}Mf(\tau,x_1,x_2)d\tau$$

является математическим ожиданием решения задачи (1), (2).

Доказательство. При независимых случайных процессах $f(t,x_1,x_2)$ и $\varepsilon_1(t),\varepsilon_2(t),\varepsilon_3(t)$ характеристический функционал $\psi\left(v_1,v_2,v_3,\omega\right)$ имеет вид $\psi(v_1,v_2,v_3,\omega)=\varphi(v_1,v_2,v_3)\psi_f(\omega)$, где $\psi_f(\omega)$ — характеристический функционал случайного процесса $f(t,x_1,x_2)$. При этом

$$\frac{\delta\psi(i\xi_1^2\chi(\tau,t,\cdot),i\xi_2^2\chi(\tau,t,\cdot),-i\chi(\tau,t,\cdot),0)}{\delta\omega(\tau,x_1,x_2)}=$$
$$=\varphi(i\xi_1^2\chi(\tau,t,\cdot),i\xi_2^2\chi(\tau,t,\cdot),-i\chi(\tau,t,\cdot))\times$$
$$\times\left.\frac{\delta\psi_f(\omega)}{\delta\omega(\tau,x_1,x_2)}\right|_{\omega=0}=i\varphi(i\xi_1^2\chi(\tau,t,\cdot),i\xi_2^2\times$$
$$\times\chi(\tau,t,\cdot),-i\chi(\tau,t,\cdot))Mf(\tau,x_1,x_2).$$

Далее,

$$F_\xi^{-1}[F_x[\varphi(i\xi_1^2\chi(\tau,t,\cdot),i\xi_2^2\chi(\tau,t,\cdot),-i\times$$
$$\times\chi(\tau,t,\cdot))Mf(\tau,x_1,x_2)](\xi)](x)=$$
$$=F_\xi^{-1}[\varphi(i\xi_1^2\chi(\tau,t,\cdot),i\xi_2^2\chi(\tau,t,\cdot),-i\chi(\tau,t,\cdot))\times$$
$$\times F_x[Mf(\tau,x_1,x_2)](\xi)](x)=$$
$$=F_\xi^{-1}[\varphi(i\xi_1^2\chi(\tau,t,\cdot),i\xi_2^2\chi(\tau,t,\cdot),-i\chi(\tau,t,\cdot))](x)\overset{x}{*}$$
$$Mf(\tau,x_1,x_2).$$

Подставляя эти соотношения в (15), получаем (16). Теорема доказана.

7. Нахождение Y_2. Выпишем задачу (5), (6) для Y_2:

$$\frac{\partial}{\partial t}Y_2(v_1,v_2,v_3,\omega,t,s_2,x_1,x_1^2,x_2,x_2^2)=$$
$$=-i\frac{\delta}{\delta v_1(t)}\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}Y_2(v_1,v_2,v_3,\omega,t,s_2,x_1,x_1^2,x_2,x_2^2)-$$
$$-i\frac{\delta}{\delta v_2(t)}\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}Y_2(v_1,v_2,v_3,\omega,t,s_2,x_1,x_1^2,x_2,x_2^2)- \qquad (17)$$
$$-i\frac{\delta}{\delta v_3(t)}Y_2(v_1,v_2,v_3,\omega,t,s_2,x_1,x_1^2,x_2,x_2^2)-$$
$$-i\frac{\delta Y_1(v_1,v_2,v_3,\omega,s_2,x_1^2,x_2^2)}{\delta\omega(t,x_1,x_2)},$$

$$Y_2(v_1,v_2,v_3,\omega,t_0,t_0,x_1,x_1^2,x_2,x_2^2)=$$
$$=M(g(x_1,x_2)g(x_1^2,x_2^2))\psi(v_1,v_2,v_3,\omega). \qquad (18)$$

Чтобы воспользоваться теоремой 1 для нахождения $Y_2(v_1,v_2,v_3,\omega,t,s_2,x_1,x_1^2,x_2,x_2^2)$, нужно знать начальное условие $Y_2(v_1,v_2,v_3,\omega,t_0,s_2,x_1,x_1^2,x_2,x_2^2)$, однако выполнено условие (18). Оказывается, что условие симметричности Y_2 по переменным (t,x_1,x_2), (s_2,x_1^2,x_2^2) позволяет найти Y_2.

Положим в уравнении (17) $s_2=t_0$

$$\frac{\partial}{\partial t}Y_2(v_1,v_2,v_3,\omega,t,t_0,x_1,x_1^2,x_2,x_2^2)=$$
$$=-i\frac{\delta}{\delta v_1(t)}\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}Y_2(v_1,v_2,v_3,\omega,t,t_0,x_1,x_1^2,x_2,x_2^2)-$$
$$-i\frac{\delta}{\delta v_2(t)}\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}Y_2(v_1,v_2,v_3,\omega,t,t_0,x_1,x_1^2,x_2,x_2^2)-$$
$$-i\frac{\delta}{\delta v_3(t)}Y_2(v_1,v_2,v_3,\omega,t,t_0,x_1,x_1^2,x_2,x_2^2)-$$
$$-i\frac{\delta Y_1(v_1,v_2,v_3,\omega,t_0,x_1^2,x_2^2)}{\delta\omega(t,x_1,x_2)},$$
$$Y_2(v_1,v_2,v_3,\omega,t_0,t_0,x_1,x_1^2,x_2,x_2^2)=$$
$$=M(g(x_1,x_2)g(x_1^2,x_2^2))\psi(v_1,v_2,v_3,\omega).$$

Получили задачу для $Y_2(v_1,v_2,v_3,\omega,t,t_0,x_1,x_1^2,x_2,x_2^2)$. Для нее применима теорема 1, и мы находим

$$Y_2(v_1,v_2,v_3,\omega,t_0,t,x_1^2,x_1,x_2^2,x_2)=Y_2(v_1,v_2,v_3,\omega,t,t_0,x_1,x_1^2,x_2,x_2^2)=$$
$$=F_\xi^{-1}[F_x[M(g(x_1,x_2)g(x_1^2,x_2^2))\psi(v_1+i\xi_1^2\chi(t_0,t,\cdot),v_2+i\xi_2^2\chi(t_0,t,\cdot),v_3-i\chi(t_0,t,\cdot),\omega)](\xi)](x)-$$
$$-i\int_{t_0}^{t}F_\xi^{-1}\left[F_x\left[\frac{\delta Y_1(v_1+i\xi_1^2\chi(\tau,t,\cdot),v_2+i\xi_2^2\chi(\tau,t,\cdot),v_3-i\chi(\tau,t,\cdot),\omega,t_0,x_1^2,x_2^2)}{\delta\omega(\tau,x_1,x_2)}\right](\xi)\right](x)d\tau.$$

Учитывая симметричность Y_2, получаем начальное условие для уравнения (17)

$$Y_2(v_1,v_2,v_3,\omega,t_0,s_2,x_1,x_1^2,x_2,x_2^2)=$$
$$=F_\xi^{-1}[F_{x^2}[M(g(x_1^2,x_2^2)g(x_1,x_2))\psi(v_1+i\xi_1^2\chi(t_0,s_2,\cdot),v_2+i\xi_2^2\chi(t_0,s_2,\cdot),v_3-i\chi(t_0,s_2,\cdot),\omega)](\xi)](x^2)-$$
$$-i\int_{t_0}^{s_2}F_\xi^{-1}\left[F_{x^2}\left[\frac{\delta Y_1(v_1+i\xi_1^2\chi(\tau,s_2,\cdot),v_2+i\xi_2^2\chi(\tau,s_2,\cdot),v_3-i\chi(\tau,s_2,\cdot),\omega,t_0,x_1,x_2)}{\delta\omega(\tau,x_1^2,x_2^2)}\right](\xi)\right](x^2)d\tau,$$

где $F_{x^2}[\cdot](\xi)$ — преобразование Фурье по переменной $x^2 = (x_1^2, x_2^2)$.

Снова воспользуемся теоремой 1, получим

$$\begin{gathered}Y_2(v_1,v_2,v_3,\omega,t,s_2,x_1,x_1^2,x_2,x_2^2) = \\ = F_\eta^{-1}[F_x[F_\xi^{-1}[F_{x^2}[M(g(x_1^2,x_2^2)g(x_1,x_2))\times \\ \times\psi(v_1 + i\xi_1^2\chi(t_0,s_2,\cdot) + i\eta_1^2\chi(t_0,t,\cdot), v_2 + \\ +i\xi_2^2\chi(t_0,s_2,\cdot) + i\eta_2^2\chi(t_0,t,\cdot), v_3 - \\ -i\chi(t_0,s_2,\cdot) - i\chi(t_0,t,\cdot),\omega)](\xi)](x^2) - \\ -i\int_{t_0}^{s_2} F_\xi^{-1}\left[F_{x^2}\left[\frac{\delta}{\delta\omega(\tau,x_1^2,x_2^2)}\times\right.\right. \\ \times Y_1(v_1 + i\xi_1^2\chi(\tau,s_2,\cdot) + i\eta_1^2\chi(t_0,t,\cdot), v_2 + \\ +i\xi_2^2\chi(\tau,s_2,\cdot) + i\eta_2^2\chi(t_0,t,\cdot), \\ v_3 - i\chi(\tau,s_2,\cdot) - i\chi(t_0,t,\cdot),\omega,t_0,x_1,x_2)]\times \\ \times(\xi)](x^2)d\tau](\eta)](x) - i\int_{t_0}^{t} F_\xi^{-1}\times \\ \times\left[F_x\left[\frac{\delta}{\delta\omega(\tau,x_1,x_2)}Y_1(v_1 + i\xi_1^2\chi(\tau,t,\cdot), v_2 + \right.\right. \\ +i\xi_2^2\chi(\tau,t,\cdot), v_3 - \\ -i\chi(\tau,t,\cdot),\omega,s_2,x_1^2,x_2^2)](\xi)](x)d\tau.\end{gathered} \tag{19}$$

Мы доказали следующий результат.

Теорема 5. *Если характеристический функционал $\psi(v_1,v_2,v_3,\omega)$ имеет вариационные производные до третьего порядка включительно, $Mg(x_1,x_2)$ и $M(g(x_1,x_2)g(x_1^2,x_2^2))$ локально суммируемы, то* (19) *является единственным симметрическим по переменным* (t,x_1,x_2), (s_2,x_1^2,x_2^2) *решением задачи* (17), (18) *в обобщенном смысле.*

8. Вторая моментная функция решения задачи (1), (2). Теперь из (19) при $v_1 = 0$, $v_2 = 0$, $v_3 = 0$, $\omega = 0$ получаем вторую моментную функцию решения задачи (1), (2).

Теорема 6. *Пусть выполняются условия теоремы 5. Тогда*

$$\begin{gathered}M(u(t,x_1,x_2)u(s_2,x_1^2,x_2^2)) = \\ = F_\eta^{-1}[F_x[F_\xi^{-1}[F_{x^2}[M(g(x_1^2,x_2^2)g(x_1,x_2))\times \\ \times\psi(i\xi_1^2\chi(t_0,s_2,\cdot) + i\eta_1^2\chi(t_0,t,\cdot), i\xi_2^2\chi(t_0,s_2,\cdot) + \\ +i\eta_2^2\chi(t_0,t,\cdot), -i\chi(t_0,s_2,\cdot) - \\ -i\chi(t_0,t,\cdot),0)](\xi)](x^2) - \\ -i\int_{t_0}^{s_2} F_\xi^{-1}\left[F_{x^2}\left[\frac{\delta}{\delta\omega(\tau,x_1^2,x_2^2)}Y_1(i\xi_1^2\chi(\tau,s_2,\cdot) + \right.\right. \\ +i\eta_1^2\chi(t_0,t,\cdot), i\xi_2^2\chi(\tau,s_2,\cdot) + i\eta_2^2\chi(t_0,t,\cdot), \\ -i\chi(\tau,s_2,\cdot) - i\chi(t_0,t,\cdot),0,t_0,x_1,x_2)]\times \\ \times(\xi)](x^2)d\tau](\eta)](x) - \\ -i\int_{t_0}^{t} F_\xi^{-1}\left[F_x\left[\frac{\delta}{\delta\omega(\tau,x_1,x_2)}\times\right.\right. \\ \times Y_1(i\xi_1^2\chi(\tau,t,\cdot), i\xi_2^2\chi(\tau,t,\cdot), -i\times \\ \times\chi(\tau,t,\cdot),0,s_2,x_1^2,x_2^2)](\xi)](x)d\tau\end{gathered} \tag{20}$$

является второй моментной функцией (в смысле обобщенных функций) решения задачи (1), (2).

Отметим, что Y_1 определяется формулой (14). Кроме того, если в (20) положить $s_2 = t$, $x_1^2 = x_1$, $x_2^2 = x_2$, то получим дисперсионную функцию решения задачи (1), (2).

9. Вторая смешанная функция. Из разложения характеристического функционала Y в степенной ряд (см. п. 3) следует, что

$$\begin{gathered}Y_1(v_1,v_2,v_3,\omega,t,x_1,x_2) = \\ = M\left(u(t,x_1,x_2)\exp\left(i\int_T[\varepsilon_1(s)v_1(s) + \right.\right. \\ +\varepsilon_2(s)v_2(s) + \varepsilon_3(s)v_3(s)]ds + \\ \left.\left.+ i\int_T\int_{R^2} f(s,\tau_1,\tau_2)\omega(s,\tau_1,\tau_2)d\tau_1 d\tau_2 ds\right)\right).\end{gathered}$$

Это позволяет находить смешанные моментные функции. Приведем один такой результат.

Теорема 7. *Пусть случайные процессы $\varepsilon_1(t)$, $\varepsilon_2(t)$, $\varepsilon_3(t)$ не зависят от процесса $f(t,x_1,x_2)$,* $\varphi(v_1,v_2,v_3)$ — характеристический функционал процессов $\varepsilon_1(t)$, $\varepsilon_2(t)$, $\varepsilon_3(t)$ — *имеет вариационные производные до второго порядка включительно и $Mg(x_1,x_2)$, $Mf(t,x_1,x_2)$ локально суммируемы. Тогда*

$$\begin{gathered}M(u(t,x_1,x_2)\varepsilon_1(s)) = \\ = \frac{1}{i}Mg(x_1,x_2)\overset{x}{*}F_\xi^{-1}\times \\ \times\left[\frac{\delta\varphi(i\xi_1^2\chi(t_0,t,\cdot), i\xi_2^2\chi(t_0,t,\cdot), -i\chi(t_0,t,\cdot))}{\delta v_1(s)}\right](x) - \\ -i\int_{t_0}^{t} F_\xi^{-1}\left[\frac{\delta\varphi\left(i\xi_1^2\chi(\tau,t,\cdot), i\xi_2^2\chi(\tau,t,\cdot), -i\chi(\tau,t,\cdot)\right)}{\delta v_1(s)}\right]\times \\ \times(x)\overset{x}{*}Mf(\tau,x_1,x_2)d\tau\end{gathered}$$

является второй моментной функцией $M(u(t,x_1,x_2)\varepsilon_1(s))$ (в смысле обобщенных функций) для решения задачи (1), (2).

Доказательство. Воспользуемся найденным выражением (14) для Y_1. При этом

$$M(u(t,x_1,x_2)\varepsilon_1(s)) = \frac{1}{i}\frac{\delta Y_1\left(v_1,v_2,v_3,\omega,t,x_1,x_2\right)}{\delta v_1(s)}\bigg|_{v_1=0,v_2=0,v_3=0,\omega=0} =$$

$$= \left\{\frac{1}{i}Mg(x_1,x_2)\overset{x}{*}F_\xi^{-1}\left[\frac{\delta\psi(v_1+i\xi_1^2\chi(t_0,t,\cdot),v_2+i\xi_2^2\chi(t_0,t,\cdot),v_3-i\chi(t_0,t,\cdot),\omega)}{\delta v_1(s)}\right](x)-\right.$$

$$\left.-\int_{t_0}^{t}F_\xi^{-1}\left[F_x\left[\frac{\delta^2\psi(v_1+i\xi_1^2\chi(\tau,t,\cdot),v_2+i\xi_2^2\chi(\tau,t,\cdot),v_3-i\chi(\tau,t,\cdot),\omega)}{\delta\omega\left(\tau,x_1,x_2\right)\delta v_1(s)}\right](\xi)\right](x)d\tau\right\}\bigg|_{v_1=0,v_2=0,v_3=0,\omega=0} =$$

$$= \frac{1}{i}Mg(x_1,x_2)\overset{x}{*}F_\xi^{-1}\left[\frac{\delta\varphi(i\xi_1^2\chi(t_0,t,\cdot),i\xi_2^2\chi(t_0,t,\cdot),-i\chi(t_0,t,\cdot))}{\delta v_1(s)}\right](x)-$$

$$-i\int_{t_0}^{t}F_\xi^{-1}\left[F_x\left[\frac{\delta\varphi(i\xi_1^2\chi(\tau,t,\cdot),i\xi_2^2\chi(\tau,t,\cdot),-i\chi(\tau,t,\cdot))}{\delta v_1(s)}Mf(\tau,x_1,x_2)\right](\xi)\right](x)d\tau =$$

$$= \frac{1}{i}Mg(x_1,x_2)\overset{x}{*}F_\xi^{-1}\left[\frac{\delta\varphi(i\xi_1^2\chi(t_0,t,\cdot),i\xi_2^2\chi(t_0,t,\cdot),-i\chi(t_0,t,\cdot))}{\delta v_1(s)}\right](x)-$$

$$-i\int_{t_0}^{t}F_\xi^{-1}\left[\frac{\delta\varphi(i\xi_1^2\chi(\tau,t,\cdot),i\xi_2^2\chi(\tau,t,\cdot),-i\chi(\tau,t,\cdot))}{\delta v_1(s)}F_x[Mf(\tau,x_1,x_2)](\xi)\right](x)d\tau.$$

Отсюда следует искомый результат. Теорема доказана.

10. Случай нормально распределенных случайных коэффициентов диффузии. Характеристический функционал нормально распределенных случайных коэффициентов диффузии $\varepsilon_1,\varepsilon_2$ имеет вид

$$\varphi(v_1,v_2) = \exp\left(i\int_T[\alpha(s)v_1(s)+\right.$$
$$+\beta(s)v_2(s)]ds-\frac{1}{2}\int_T\int_T[\gamma_1(s_1,s_2)v_1(s_1)v_1(s_2)+$$
$$\left.+\gamma_2(s_1,s_2)v_2(s_1)v_2(s_2)]ds_1ds_2\right),$$

где $\alpha,\beta,\gamma_1,\gamma_2$ — неотрицательные функции.

Математическое ожидание решения задачи Коши для уравнения (1) при $\varepsilon_3\equiv 0,\ f\equiv 0$ находится по формуле (15) и принимает вид

$$Mu(t,x_1,x_2) =$$
$$=\frac{1}{4\pi^2}\iint_{R^2}[Mg(x_1-\tau_1,x_2-\tau_2)\times$$
$$\times\iint_{R^2}\exp(-\int_{t_0}^{t}[\alpha(s)\xi_1^2+\beta(s)\xi_2^2]ds+$$
$$+\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{t}[\gamma_1(s_1,s_2)\xi_1^4+\gamma_2(s_1,s_2)\xi_2^4]ds_1ds_2)\times$$
$$\times\exp(-i(\xi_1\tau_1+\xi_2\tau_2))d\xi_1d\xi_2]d\tau_1d\tau_2.$$

Из этого выражения следует, что при постоянных γ_1,γ_2 при $t\to+\infty$ математическое ожидание $Mu(t,x_1,x_2)$ не стремится к нулю. Отметим, что при детерминированной модели, т. е. при $\gamma_1=\gamma_2=0$, решения стремятся к нулю при $t\to+\infty$. Это необходимо учитывать в реальных процессах.

11. Заключение. Полученные формулы для математического ожидания (15) и для второй моментной функции (20) являются довольно общими. Они могут быть использованы для уравнений, коэффициенты которых являются различными случайными процессами. Формулы (14) для Y_1 и (19) для Y_2 позволяют находить некоторые смешанные моментные функции более высокого порядка с помощью вычисления вариационных производных (см. п. 9). Из вида формулы (19) для Y_2 трудно усмотреть ее симметричность по переменным (t,x_1,x_2) и (s_2,x_1^2,x_2^2). Для этого нужно подставить в нее найденное ранее значение Y_1.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Данфорд Н., Шварц Д.* Линейные операторы. Т. 1. М.: ИЛ, 1962.

2. *Владимиров В.С.* Обобщенные функции в математической физике. М.: Наука, 1976.

3. *Колмогоров А.Н., Фомин С.В.* Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1976.

4. *Задорожний В.Г.* Дифференциальные уравнения с вариационными производными. Воронеж: ВорГУ, 2000.

5. *Кляцкин В.И.* Стохастические уравнения и волны в случайно-неоднородных средах. М.: Наука, 1980.

6. *Фурсиков А.В.* Проблема замыкания цепочек моментных уравнений, соответствующих трехмерной системе уравнений Навье—Стокса в случае больших чисел Рейнольдса // ДАН СССР. 1991. Т. 319. № 1. С. 83—87.

7. *Фурсиков А.В.* Моментная теория для уравнений Навье—Стокса со случайной правой частью // Изв. РАН. Сер. матем. 1992. Т. 56. № 6. С. 1273—1315.

8. *Шапиро В.Е., Логинов В.М.* Динамические системы при случайных воздействиях. Новосибирск: Наука, 1983.

9. *Тихонов В.И.* Воздействие флуктуаций на простейшие параметрические системы // Автоматика и телемеханика. 1958. Т. 19. № 8. С. 717—723.

10. *Адомиан Дж.* Стохастические системы. М.: Мир, 1987.

11. *Вентцель А.Д., Фрейдлин М.И.* Флуктуации в динамических системах под действием малых случайных возмущений. М.: Наука, 1979.

12. *Монин А.С., Яглом А.М.* Статистическая гидромеханика. М.: Наука, 1967.

13. *Задорожний В.Г., Строева Л.Н.* О моментных функциях решения начальной задачи линейного дифференциального уравнения первого порядка со случайными коэффициентами // Дифференц. уравн. 2000. Т. 36. № 3. С. 377—385.

14. *Задорожний В.Г.* Дифференциальное уравнение в банаховом пространстве, содержащее вариационную производную // СМЖ. 1992. Т. 33. № 2. С. 80—93.

15. *Задорожний В.Г.* Моментные функции решения задачи Коши стохастического уравнения теплопроводности // Докл. РАН. 1999. Т. 364. № 6. С. 735—737.

16. *Шилов Г.Е.* Математический анализ. М.: Наука, 1965.