

**МЕТОДИКА РЕШЕНИЯ СТОХАСТИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ  
ДИНАМИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ  
ПРИ УПРАВЛЕНИИ АВИАЦИОННОЙ СИСТЕМОЙ**

**О. В. Базарский, В. В. Михайлов**

*Воронежское высшее военное авиационное инженерное училище*

В статье рассматриваются методика и модели оптимизации применения метеорологической информации при решении авиационных задач, построенные на базе методов динамического программирования. Обоснована целесообразность использования в качестве критерия эффективности функционирования авиационной системы максимума вероятности выполнения заданной программы.

**ВВЕДЕНИЕ**

Актуальность проблемы повышения качества управления открытой авиационной системой (АС) в условиях стохастического влияния ряда внешних факторов не вызывает сомнений [3–5]. Функционирование указанной системы, как правило, является многошаговым, повышение его эффективности требует решения оптимизационной динамической задачи управления в условиях неопределенности. Классические модели оптимизации обычно основаны на использовании информации об экономической составляющей качества управления. Однако при решении ряда задач экономические показатели играют второстепенную роль. Например, функционирование военной авиации, как правило, не преследует цели получения максимальной прибыли. Следовательно, экономические критерии в этом случае не могут быть положены в основу построения оптимизационных моделей. Поэтому разработка и исследование методики решения оптимизационной стохастической задачи управления, когда экономические критерии не являются определяющими, представляет определенный научный и практический интерес.

**ПОСТАНОВКА СТОХАСТИЧЕСКОЙ  
ЗАДАЧИ ДИНАМИЧЕСКОГО  
ПРОГРАММИРОВАНИЯ**

Постановку динамической задачи оптимального управления в рассматриваемых условиях предлагается осуществить на базе уравнения

Беллмана [1], представляющего собой рекуррентное соотношение, обеспечивающее последовательную оптимизацию управления на каждом этапе управляемого процесса.

$$J_t^k(y_{T-t}^k, x_{T-t}^k) = \underset{x_{T-t}}{\text{opt}} [F(y_{T-t}^k, x_{T-t}^k) + J_{t-1}^k(y_{T-(t+1)}^k)], \quad (1)$$
$$\forall t = \overline{1, T},$$

где  $T$  — количество этапов,  $t$  — число этапов до конца процесса управления,  $J_t^k$  и  $J_{t-1}^k$  — оптимальные выигрыши на соответствующих этапах,  $y_{T-t}^k, y_{T-(t+1)}^k$  — векторы состояния АС на соответствующих этапах,  $x_{T-t}^k$  и  $F(y_{T-t}^k, x_{T-t}^k)$  — вектор принятия решений и функция выигрыша на  $(T-t)$ -ом этапе.

В соотношении (1) индекс  $k$  указывает на  $k$ -ю стратегию использования стохастической информации [3, 4], под которой понимается заданная методика получения необходимых прогностических и фактических стохастических данных. Применение множества таких стратегий обеспечивает множество вариантов решения динамической задачи оптимального управления (1). Методика выбора наилучшей стратегии и построения на базе этой стратегии наилучшего вектора  $x^{\text{opt}}$ , обеспечивающая, по сути, решение стохастической задачи динамического программирования, требует отдельного рассмотрения.

**МЕТОДИКА РЕШЕНИЯ  
ПОСТАВЛЕННОЙ ЗАДАЧИ**

Построение указанной методики предлагается осуществить на базе использования дополнительной статистической информации о соответствии принимаемых решений и эффектив-

ности функционирования АС. Указанная информация может быть получена с помощью анализа показателей относительной верификации  $\gamma^k$  и  $\omega^k$ , рассчитанных на базе архивной информации о критерии  $J$ . При решении оптимизационной задачи на максимум, указанные показатели предлагается определять по формулам, предложенным в работе [3]:

$$\gamma^k = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{J_i(y^k) - J_i(y^3)}{J_i(y^3)},$$

$$\omega^k = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{J_i(y^k) - J_i(y^3)}{J_i(y^u) - J_i(y^3)}, \quad \forall k = \overline{1, K} \quad (2)$$

где  $N$  — объем выборки;  $K$  — количество стратегий использования стохастической информации;  $y^k, y^3, y^u$  — параметры состояния АС по окончании ее функционирования, связанные соответственно с  $k$ -ой, эмпирической, основанной на опыте и интуиции лица принимающего решение, и идеальной стратегиями использования стохастической информации [3].

Итак, основное содержание методики решения стохастической задачи динамического программирования при управлении АС сводится к следующему.

1. С помощью рекуррентного соотношения (1) для всех этапов функционирования АС и стратегий использования стохастической информации разрабатывается множество вариантов плана функционирования АС.

2. С помощью соотношений (2) выбирается план, обеспечивающий максимум показателей  $\gamma^k$  и  $\omega^k$ .

3. На основе анализа численных значений показателей  $\gamma^k$  и  $\omega^k$  делается вывод об эффективности наилучшего вектора  $x^{opt}$  принятия решений и перспективах ее увеличения.

Отличительная особенность данной методики состоит в том, что ее применение позволяет свести решение стохастической динамической задачи управления к решению соответствующей задачи с детерминированными параметрами, что способствует улучшению интерпретации полученных результатов.

### МОДЕЛИ ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ

Апробирование разработанной методики осуществлено на примере построения моделей принятия решений при управлении АС, когда стохастическая составляющая влияющих факторов обусловлена метеорологической неопределенностью. При этом цель управления заклю-

чается в обеспечении оптимального выполнения ряда элементарных задач (ЭЗ) на последовательных этапах функционирования АС, особенностью которого является отсутствие требований, определяющих необходимость выполнения конкретных ЭЗ на конкретных этапах. В это же время важный лимитирующий фактор состоит в необходимости выполнения всей программы в заданный временной период. Постановка задачи на построение моделей принятия решений при управлении АС в указанных условиях заключается в следующем.

Пусть для выполнения программы, состоящей в решении  $M$  ЭЗ, имеются ограниченные ресурсы, обеспечивающие возможность выполнения  $N$  ЭЗ за  $T$  этапов (дней). Причем на каждом этапе можно выполнить лишь одну ЭЗ. Если метеоусловия не соответствуют установленным требованиям, то ЭЗ выполнена быть не может. Необходимо построить динамические модели принятия решений на поэтапное функционирование АС в условиях метеонеопределенности, обеспечивающее максимум вероятности  $P_{M,N,T}^k$  выполнения всей программы.

Построение указанных моделей предлагается осуществить с учетом анализа результатов прогноза выполнения программы функционирования АС по влияющим метеофакторам. В качестве предикторов таких прогнозов — принять вероятностные характеристики качества стратегий использования метеоинформации и показатели, учитывающие влияние метеоусловий на возможность выполнения ЭЗ. В этом случае вероятность  $P_{M,N,T}^k$  выполнения всей программы предлагается определить с помощью рекуррентных соотношений:

$$P_{M,N,T}^k = \begin{cases} p_T^k + P_{M-1,N-1,T-1}^k(1 - p_T^k) & \text{при } m = M - 1, n = N - 1, t = T - 1; \\ (p_T^{*k} - p_T^k) + P_{M,N-1,T-1}^k(1 - (p_T^{*k} - p_T^k)) & \text{при } m = M, n = N - 1, t = T - 1; \\ 1 - p_T^{*k}(1 - P_{M,N,T-1}^k) & \text{при } m = M, n = N, t = T - 1 \end{cases} \quad (3)$$

при условиях:

$$P_{M,N,T}^k = 1 \forall N \text{ и } T \text{ при } M = 0,$$

$$P_{M,N,T}^k = 0 \forall N < M \text{ при } T < M, \quad (4)$$

где  $p_T^k$  — есть вероятность выполнения ЭЗ при прогнозе благоприятных метеоусловий с помощью  $k$ -ой стратегии;  $p_T^{*k}$  — вероятность приня-

тия решения на выполнение ЭЗ;  $m, n, t$  — количество оставшихся ЭЗ, ресурсов и этапов соответственно.

Указанные вероятности предлагается рассчитывать по формулам:

$$\int_{p_{0T}^k}^1 f^k(\tilde{p}_T^k) p_T^k d\tilde{p}_T^k = p_T^k, \quad (5)$$

$$\int_{p_{0T}^k}^1 f^k(\tilde{p}_T^k) d\tilde{p}_T^k = p_T^{*k},$$

где  $p_{0T}^k$  — пороговая вероятность выполнения ЭЗ;  $f^k(\tilde{p}_T^k)$  — плотность распределения вероятности  $\tilde{p}_T^k$  принятия решения;  $p_T^k$  — условная вероятность выполнения ЭЗ при прогнозе благоприятных метеоусловий.

Из выражений (3) — (5) следует, что состояние АС, определяемое величинами  $m, n, t$  может меняться при появлении одного из трех событий: при прогнозе благоприятных метеоусловий принимается решение на выполнение ЭЗ, и она выполняется; при прогнозе благоприятных метеоусловий принимается решение на выполнение ЭЗ, и она не выполняется вследствие неоправдываемости метеопрогноза; при прогнозе неблагоприятных метеоусловий принимается решение на невыполнение ЭЗ. Данные события представляют собой полную группу несовместных событий. Безусловно, что в процессе функционирования АС возможен случай выполнения ЭЗ, когда прогноз неблагоприятных метеоусловий не оправдывается. Однако вероятность реализации такого случая в работе минимизируется выбором порога  $p_{0T}^k$ , зависящего от выбранной процедуры управления. Например, если цена выполнения ЭЗ не играет решающей роли, то значение пороговой вероятности  $p_{0T}^k$  можно снизить, повысив уровень риска и вероятность выполнения ЭЗ. В рассматриваемой постановке, требующей максимизации вероятности  $P_{M,N,T}^k$ , задача управления предусматривает именно такую процедуру.

Необходимые рекомендации на каждом этапе предлагается разрабатывать путем сравнения значений пороговой вероятности  $p_{0T}^k$  и вероятности  $P_{M,N,T}^k$ . В случае если  $P_{M,N,T}^k \geq p_{0T}^k$ , принимается решение на выполнение ЭЗ, в противном случае — на невыполнение. Величину  $p_{0T}^k$  перед каждым этапом функционирования АС следует определять из условия:

$$\frac{\partial P_{M,N,T}^k}{\partial p_{0T}^k} = 0. \quad (6)$$

Выбор наилучшей стратегии осуществляется по максимуму показателей  $\gamma^k, \omega^k$ , рассчитанных с помощью соотношений (2).

На практике часто возникает проблема аналитического описания применяемых в выражениях (3) — (6) характеристик, что вызывает необходимость представления этих характеристик в дискретном виде. С этой целью, по результатам статистического анализа данных сопряженности принимаемых решений с фактическими метеоусловиями, в общем виде представленных в табл. 1, для каждой стратегии использования метеоинформации необходимо определить оценки  $\hat{p}^{rk}$  и  $\hat{p}^{*k}$  соответствующих вероятностей:

$$\hat{p}^{rk} = \frac{n_{11}}{\sum_i n_{i1}}, \quad \hat{p}^{*k} = \frac{\sum_i n_{i1}}{\sum_{ij} n_{ij}}. \quad (7)$$

Таблица 1

Сопряженность между принимаемыми решениями и фактическими метеоусловиями

Фактические условия	Решение		$\sum_j$
	«да»	«нет»	
«соответствуют»	$n_{11}$	$n_{12}$	$n_{1j}$
«не соответствуют»	$n_{21}$	$n_{22}$	$n_{2j}$
$\sum_i$	$n_{i1}$	$n_{i2}$	$\sum_{ij} n_{ij}$

Применение полученных оценок дает возможность преобразования рекуррентных соотношений (3):

$$P_{M,N,T}^k = \begin{cases} \hat{p}^{*k} \hat{p}^{rk} + P_{M-1,N-1,T-1}^k (1 - \hat{p}^{*k} \hat{p}^{rk}) \\ \text{при } m = M - 1, n = N - 1, t = T - 1; \\ \hat{p}^{*k} (1 - \hat{p}^{rk}) + P_{M,N-1,T-1}^k (1 - (\hat{p}^{*k} (1 - \hat{p}^{rk}))) \\ \text{при } m = M, n = N - 1, t = T - 1; \\ 1 - \hat{p}^{*k} (1 - P_{M,N,T-1}^k) \\ \text{при } m = M, n = N, t = T - 1. \end{cases} \quad (8)$$

Если в АС имеется  $R$  летательных аппаратов (ЛА), и один ЛА на каждом этапе может выполнить только одну ЭЗ, то вероятность  $G_{M,N,T}^k$  выполнения программы функционирования АС определяется рекуррентными соотношениями:

$$G_{M,N,T}^k = \begin{cases} p_T^{rk} + G_{M-r,N-r,T-1}^k (1 - p_T^{rk}) \\ \text{при } m = M - r, n = N - r, t = T - 1; \\ (p_T^{*rk} - p_T^{rk}) + G_{M,N-r,T-1}^k (1 - (p_T^{*rk} - p_T^{rk})) \\ \text{при } m = M, n = N - r, t = T - 1; \\ 1 - p_T^{*rk} (1 - G_{M,N,T-1}^k) \\ \text{при } m = M, n = N, t = T - 1 \end{cases} \quad (9)$$

при условиях:

$$G_{M,N,T}^k = 1 \forall N \text{ и } T \text{ при } M = 0, \quad (10)$$

$$G_{M,N,T}^k = 0 \forall N < M \text{ при } T < M / R,$$

где  $p_T^{rk} = \int_{p_{0T}^{rk}}^{p_{0T}^{(r+1)k}} f^k(\tilde{p}^{rk}) p^{rk} d\tilde{p}^{rk}$ ,  $p_T^{*rk} = \int_{p_{0T}^{rk}}^{p_{0T}^{(r+1)k}} f^k(\tilde{p}^{rk}) d\tilde{p}^{rk}$ ,

$$\forall r = \overline{1, R}, k = \overline{1, K}.$$

Величину  $p_{0T}^{rk}$  перед каждым этапом функционирования АС, как и ранее, предлагается определять из условия:

$$\frac{\partial G_{M,N,T}^k}{\partial p_{0T}^{rk}} = 0. \quad (11)$$

При дискретном распределении вектора-предиктора соотношения (9) принимают вид:

$$G_{M,N,T}^k = \begin{cases} \hat{p}^{*rk} \hat{p}'^{rk} + G_{M-1, N-1, T-1}^k (1 - \hat{p}^{*rk} \hat{p}'^{rk}) \\ \text{при } m = M - r, n = N - r, t = T - 1; \\ \hat{p}^{*rk} (1 - \hat{p}'^{rk}) + G_{M, N-1, T-1}^k (1 - (\hat{p}^{*rk} (1 - \hat{p}'^{rk}))) \\ \text{при } m = M, n = N - r, t = T - 1; \\ 1 - \hat{p}^{*rk} (1 - G_{M, N, T-1}^k) \\ \text{при } m = M, n = N, t = T - 1. \end{cases} \quad (12)$$

Оценки вероятностей  $\hat{p}^{*rk}$ ,  $\hat{p}'^{rk}$  ( $r = \overline{1, R}$ ,  $k = \overline{1, K}$ ) в этом соотношении определяются по данным, представленным в табл. 2, с помощью выражений:

$$\hat{p}^{*rk} = \frac{n_{1r}}{\sum_i n_{ir}}, \hat{p}'^{rk} = \frac{\sum_i n_{ir}}{\sum_{ij} n_{ij}}. \quad (13)$$

Пороговая вероятность определяется для каждого этапа выполнения программы. Изменение параметров на предыдущем этапе, как правило, вызывает изменение решения на текущем этапе и, соответственно, общий выигрыш. Здесь необходимо отметить, что алгоритм решения поставленной задачи реализуется с последнего этапа, то есть сначала определяется условный максимальный выигрыш и соответ-

ствующее ему оптимальное решение на последнем этапе, а затем оптимизируются все решения на предшествующих этапах.

Для получения численных значений оценок  $\hat{p}^{*rk}$ ,  $\hat{p}^{*k}$ ,  $\hat{p}'^{rk}$  и  $\hat{p}^{*rk}$  была сформирована архивная выборка, составленная по семи пунктам (Киров, Нижний Новгород, Москва, Волгоград, Воронеж, Ростов-на-Дону, Астрахань), за период с 1979 по 2001 год. В качестве влияющих метеофакторов рассматривались высота нижней границы облаков (ВНГО) и грозное положение в районе выполнения ЭЗ. Прогноз ВНГО осуществлялся с помощью известных методов Е. И. Гоголевой и З. А. Спарышкиной [5], а так же с помощью построенных уравнений регрессии. Для прогноза грозного положения использовались методы Вайтинга, Фауста, Фатеева и Шоултера [5], а так же метод, основанный на применении искусственных нейронных сетей (ИНС) [4]. Причем в одном случае и прогноз ВНГО, и прогноз грозного положения разрабатывались без учета прогностической информации об атмосферной турбулентности, полученной с помощью разработанного в работе [2] прогностического метода, основанного на оценке фрактальных свойств атмосферной турбулентности, в другом — с учетом указанной информации.

Различные сочетания используемых методов прогноза ВНГО и грозного положения формируют множество стратегий  $\{S_{AC}^k\}$  использования метеорологической информации. В табл. 3 приведены пять из них, наиболее контрастные по критерию эффективности функционирования АС. В данной таблице звездочкой обозначены методы, применяемые совместно с методом прогноза АТ, построенным путем модификации метода Херста [2].

Результатом любой из рассматриваемых стратегий является определенный вариант решения поставленной задачи. Наилучшая стратегия использования метеоинформации и эффективность применения исследуемых моделей

Таблица 2

Сопряженность между принимаемыми решениями на выполнение ЭЗ г ЛА и фактическими метеорологическими условиями

Фактические условия	Решение							$\sum_j$
	1 ЛА	2 ЛА	...	r ЛА	...	R ЛА	0 ЛА	
«соответствуют»	$n_{11}$	$n_{12}$	...	$n_{1r}$	...	$n_{1R}$	$n_{10}$	$n_{1j}$
«не соответствуют»	$n_{21}$	$n_{22}$	...	$n_{2r}$	...	$n_{2R}$	$n_{20}$	$n_{2j}$
$\sum_i$	$n_{i1}$	$n_{i2}$	...	$n_{ir}$	...	$n_{iR}$	$n_{i0}$	$\sum_{ij} n_{ij}$

Стратегии использования метеоинформации в процессе функционирования авиационной системы

Стратегии	Прогностические методы	
	ВНГО	Грозовое положение
$S_{AC}^1$	Гоголевой	Фауста
$S_{AC}^2$	Спарышкиной	Вайтинга
$S_{AC}^3$	Гоголевой	ИНС
$S_{AC}^4$	(Уравнение регрессии)*	Вайтинга
$S_{AC}^5$	(Уравнение регрессии)*	(ИНС)*

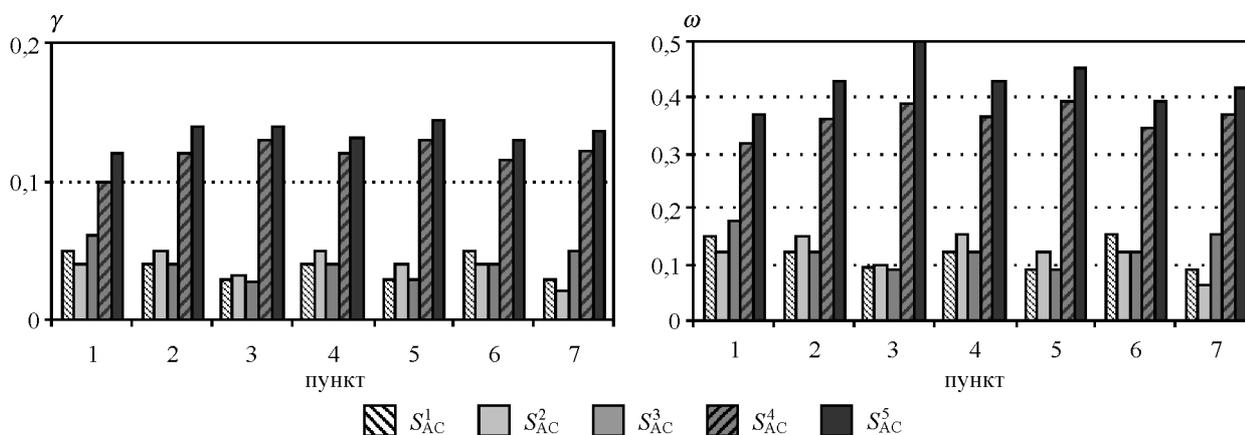


Рис. Диаграммы зависимостей показателей  $\gamma$  и  $\omega$  от стратегий  $S_{AC}^k$

определялись путем анализа показателей  $\gamma^k$ ,  $\omega^k$ , рассчитанных по соотношениям (2). На рис. представлены диаграммы зависимостей показателей  $\gamma$  и  $\omega$  от стратегий  $S_{AC}^k$ . Анализ этих диаграмм показывает, что применение построенных моделей принятия решений обеспечивает существенное повышение эффективности функционирования АС. Так применение стратегий  $S_{AC}^1 - S_{AC}^3$  приводит к незначительному положительному эффекту. Стратегии же  $S_{AC}^4$  и  $S_{AC}^5$  обеспечивают увеличение показателя  $\gamma$  на 12–15 %, а показателя  $\omega$  — на 35–50 %.

Таким образом, полученные результаты указывает на то, что при любых  $M, N, T$ , вероятность выполнения заданной программы при использовании построенных моделей выше, чем при эмпирическом подходе. Данный факт не противоречит логичным рассуждениям, что является дополнительным подтверждением работоспособности построенных моделей и ме-

тодики, целесообразности их применения при управлении метеозависимой АС.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Беллман Р. Динамическое программирование. М.: Иностранная литература, 1960. — 400 с.
2. Матвеев М.Г., Михайлов В.В. Применение теории фракталов для прогноза природных стохастических полей. / Системы управления и информационные технологии, 2005, № 5 (22), С. 21–25.
3. Михайлов В.В. Оптимизация использования метеоинформации при решении практических задач. / Метеорология и гидрология, 2006, № 2, С. 17–24.
4. Михайлов В.В. Построение искусственных нейронных сетей в практике получения стохастической прогностической информации / Системы управления и информационные технологии, 2006, № 3.1 (25), С. 164–167.
5. Хандожко Л.А. Практикум по экономике гидрометеорологического обеспечения народного хозяйства. СПб.: Гидрометеиздат, 1993. — 312 с.